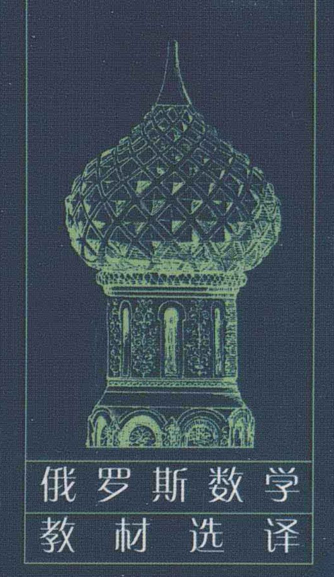


"十一五"国家重点图书

数学分析原理

(第一卷)(第9版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨　著
□ 吴亲仁　陆秀丽　丁寿田　译



总 策 划：张小萍
责任编辑：李 鹏
封面设计：王凌波

本书是Г. M. 菲赫金哥尔茨继《微积分学教程》三卷本后的又一部关于数学分析的经典著作，是作者总结多年教学经验编写而成的。

本书针对大学数学系一二年级的分析课程，因此分两卷出版。第一卷内容包括：实数、一元函数、极限论、一元连续函数、一元函数的微分法、微分学的基本定理、应用导数来研究函数、多元函数、多元函数的微分学、微积分的几何应用和力学应用，书中专列一章讲述数学分析基本观念发展简史；第二卷内容包括：数项级数、函数序列及函数级数、反常积分、带参变量的积分、隐函数和函数行列式、线积分、二重积分、曲面面积和面积分、三重积分、傅里叶级数等，书后附有“数学分析进一步发展概况”的附录。

本书可供各级各类高等学校的数学分析与高等数学课程作为教学参考书，是数学分析教师极好的案头用书。

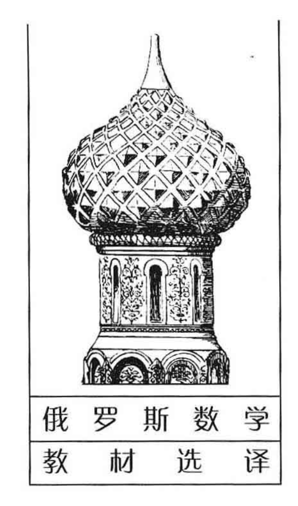
ISBN 978-7-04-034526-1



学科类别：数学

academic.hep.com.cn

定价 59.00 元



俄罗斯数学
教材选译

"十一五"国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

数学分析原理

(第一卷)(第9版)

SHUXUE FENXI YUANLI

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨　著
□ 吴亲仁　陆秀丽　丁寿田　译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

Translation from the Russian language edition:
Basis of the mathematical analysis by Grigoriy Mikhailovich Fichtenholz
Copyright © 2012 Publisher Lan All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

数学分析原理：第9版. 第1卷 /（俄罗斯）菲赫金哥尔茨著；吴亲仁，陆秀丽，丁寿田译. -- 2版. -- 北京：高等教育出版社，2013.3
（俄罗斯数学教材选译）
ISBN 978-7-04-034526-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①菲… ②吴… ③陆… ④丁… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 277437 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 赵 阳　　版式设计 余 杨
责任校对 殷 然　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm × 1092mm 1/16		
印　张	24	版　次	1959年6月第1版
字　数	357千字		2013年3月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2013年3月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 34526-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从 20 世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到 "文化大革命" 前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序 言

《数学分析原理》是作为大学数学系一二年级学生的分析教科书而编写的; 因此也就把书分成两卷. 在编写本书时, 广泛地采用了我的三卷本《微积分学教程》的材料; 但为了要使本书接近于正式的数学分析教学大纲与讲课的实际可能性, 我已把这三卷中包含的材料加以精简与修改.

我给自己定下的任务是这样的:

1. 我认为在数学分析原理中主要的一个任务是要做到叙述上的*系统性*与在可能范围内的*严格性*. 为了使给予学生的知识有一定的系统, 我认为对于教科书来说, 材料的叙述有必要按照*逻辑的*顺序.

虽然如此, 但教本这样的编排仍然使讲课者在个别的地方 —— 从教学法着眼 —— 有可能放弃严格的系统性 (也许, 甚至使他更容易获得这种可能). 例如, 我自己在讲课中通常把那种对于初学者困难的东西, 如实数理论、收敛性原理或者连续函数的性质都稍稍延后.

2. 同时, 数学分析教程对于学生来说, 不应该只是一连串的 "定义" 与 "定理", 而应该是行动的指南. 必须教会学生把这些定理应用到实际中去, 帮助他们掌握分析的计算工具. 虽然这个任务大部分是落到分析的习题课上, 可是随着理论材料的叙述, 我也按照需要采用了一些例题; 例题为数虽不多, 但却是为了培养学生能自觉地做习题而选择的.

3. 大家知道, 数学分析无论在数学本身方面或在相近的知识领域方面都有着何等奇妙的与多种多样的应用; 学生以后将会时常碰到它们. 可是关于数学分析与其他数学分支, 以及与实际需要相联系的这种思想, 在研究分析原理时就应该为学生所通晓. 正因为如此, 所以一有可能, 我就引进了分析在几何上、在力学上以及在物理上与工程上的应用的例题.

4. 关于把分析计算一直算到求出数字的结果的问题, 在原则上与实用上有着同样的重要性. 因为只有在最简单的情况下, 分析上的问题才有 "准确的" 解或 "有限形式的" 解, 所以使学生熟悉近似方法的运用与学会作出近似公式都有其重要性. 在本书中也注意到了这一点.

5. 关于叙述本身方面, 我想作少许说明. 首先要提到的是极限概念, 它在分析的基本概念中占有主要的地位, 并且以各种形式出现而贯穿全部教程. 这种情况向我们提出了一项任务, 那就是要建立各种形式的极限的统一概念. 这不仅在原则上是重要的, 而且在实际上也是必需的, 为的是避免时常要重新建立极限的理论. 要达到这个目的, 有两条途径: 或者一开始就给出 "有序变量" 的最一般的极限定义 (例如, 照沙都诺夫斯基与摩尔 – 史密斯那样去做), 或者把各种极限归结为最简单的情形 —— 在编号数列上变化着的变量的极限. 第一种观点对初学者是不易理解的, 所以我采用了第二种观点: 每一种新形式的极限定义首先都用序列的极限给出, 然后才用 "ε–δ 语言" 给出.

6. 还要指出叙述上的一个细节: 在第二卷中, 讲到曲线积分与曲面积分时, 我提出了 "第一型" 的曲线积分与曲面积分 (恰好与沿无定向的区域的普通积分及二重积分相似) 和 "第二型" 的这些积分 (其中相似之处已经局部地失去了) 之间的区别. 根据多次的经验, 我深信这样的区分有助于更好地理解, 并且也便于应用.

7. 在对教学大纲所作的为数不多的补充中, 我把椭圆积分 (这是在实际上常遇到的) 简要介绍到书内, 并且有些时候提出了一些恰好要引用椭圆积分的问题. 使得那种由于解答一些简单问题养成的有害错觉 —— 仿佛认为分析计算的一些结果一定是 "初等式子", 从此消灭!

8. 在本书中各个地方, 读者可找到带有数学史性质的说明. 并且第一卷是以 "数学分析基本观念发展简史" 结尾的, 而在第二卷末载出了 "数学分析进一步发展概况". 当然, 这一切绝不是用来代替学生以后在一般的 "数学史" 教程中所要熟悉的数学分析的历史. 如果在上面提到的前一概述中涉及概念本身的来源, 那么带有历史意义的说明就在于使读者至少了解分析学历史中最重要的事件在年代上一般的次序.

我现在要把和刚才所说的密切有关的事直接告诉读者 —— 学生. 那就是, 书中叙述的次序是按照现代对于数学的严格性的要求安排的, 这种要求是在长时间内形成起来的, 因此, 叙述的次序自然和数学分析在历史上的发展所经过的道路有所不同. 如马克思所说: "…… 正如一切科学的历史进程一样, 在摸到它们的真正出发点之前, 总先走过许多弯路. 科学不同于其他建筑师, 它不只画出空中楼阁, 而且在它打下地基之前, 先造出房屋的各层."①

读者一开始研究分析学时就会遇到与此类似的情况: 本书第一章讲述 "实数", 第三章讲述 "极限论", 从第五章起才开始微分学与积分学的系统的叙述.

---

①马克思. 马克思政治经济学批判. 北京: 人民出版社, 1955: 30.

在历史上的次序恰恰是与此相反的: 微分学与积分学起源于 17 世纪, 而在 18 世纪发现了很多重要的应用, 有了进一步的发展; 在 19 世纪初, 极限论才成为数学分析的基础, 至于用来论证最精密的极限论原理的实数理论, 它的明晰概念一直到 19 世纪后半期才建立起来.

这部书总结了我在列宁格勒大学教数学分析的多年经验. 希望它对苏联青年将会是有用的.

Г. М. 菲赫金哥尔茨

目　录

《俄罗斯数学教材选译》序

序言

第一章　实数 · · · 1

§1. 实数集合及其有序化 · · · 1

1. 前言 · · · 1
2. 无理数定义 · · · 2
3. 实数集合的有序化 · · · 4
4. 实数的无尽十进小数的表示法 · · · 5
5. 实数集合的连续性 · · · 7
6. 数集合的界 · · · 8

§2. 实数的四则运算 · · · 10

7. 实数的和的定义及其性质 · · · 10
8. 对称数 · 绝对值 · · · 11
9. 实数的积的定义及其性质 · · · 13

§3. 实数的其他性质及其应用 · · · 14

10. 根的存在性 · 具有有理指数的乘幂 · · · 14
11. 具有任何实指数的乘幂 · · · 16
12. 对数 · · · 17
13. 线段的测量 · · · 18

第二章 一元函数 · · · · · · 20
§1. 函数概念 · · · · · · 20
14. 变量 · · · · · · 20
15. 变量的变域 · · · · · · 21
16. 变量间的函数关系 · 例题 · · · · · · 21
17. 函数概念的定义 · · · · · · 22
18. 函数的解析表示法 · · · · · · 24
19. 函数的图形 · · · · · · 25
20. 以自然数为变元的函数 · · · · · · 26
21. 历史的附注 · · · · · · 28
§2. 几类最重要的函数 · · · · · · 29
22. 初等函数 · · · · · · 29
23. 反函数的概念 · · · · · · 32
24. 反三角函数 · · · · · · 33
25. 函数的叠置 · 结束语 · · · · · · 36

第三章 极限论 · · · · · · 38
§1. 函数的极限 · · · · · · 38
26. 历史的说明 · · · · · · 38
27. 数列 · · · · · · 38
28. 序列的极限定义 · · · · · · 39
29. 无穷小量 · · · · · · 41
30. 例 · · · · · · 42
31. 无穷大量 · · · · · · 44
32. 函数极限的定义 · · · · · · 45
33. 函数极限的另一定义 · · · · · · 47
34. 例 · · · · · · 48
35. 单侧极限 · · · · · · 53
§2. 关于极限的定理 · · · · · · 54
36. 具有有限的极限的自然数变元的函数的性质 · · · · · · 54
37. 推广到任意变量的函数情形 · · · · · · 56
38. 在等式与不等式中取极限 · · · · · · 57
39. 关于无穷小量的引理 · · · · · · 58
40. 变量的算术运算 · · · · · · 59
41. 未定式 · · · · · · 61

42. 推广到任意变量的函数情形 63
43. 例 64
§3. 单调函数 67
44. 自然数变元的单调函数的极限 67
45. 例 69
46. 关于区间套的引理 70
47. 在一般情形下单调函数的极限 71
§4. 数 e 73
48. 数 e 看作序列的极限 73
49. 数 e 的近似计算法 74
50. 数 e 的基本公式 · 自然对数 76
§5. 收敛原理 78
51. 部分序列 78
52. 以自然数为变元的函数存在有限极限的条件 80
53. 任意变元的函数存在有限极限的条件 81
§6. 无穷小量与无穷大量的分类 83
54. 无穷小量的比较 83
55. 无穷小量的尺度 84
56. 等价的无穷小量 84
57. 无穷小量的主部的分离 86
58. 应用问题 86
59. 无穷大量的分类 88

第四章 一元连续函数 89

§1. 函数的连续性 (与间断点) 89
60. 函数在一点处的连续性的定义 89
61. 单调函数的连续性条件 91
62. 连续函数的算术运算 91
63. 初等函数的连续性 92
64. 连续函数的叠置 94
65. 几个极限的计算 94
66. 幂指数表达式 96
67. 间断点的分类 · 例子 97
§2. 连续函数的性质 98
68. 关于函数取零值的定理 98
69. 应用于解方程 100

70. 关于中间值的定理 · · · · · 101
71. 反函数的存在性 · · · · · 102
72. 关于函数的有界性的定理 · · · · · 103
73. 函数的最大值与最小值 · · · · · 104
74. 一致连续性的概念 · · · · · 105
75. 关于一致连续性的定理 · · · · · 106

第五章 一元函数的微分法 · · · · · 108

§1. 导数及其计算 · · · · · 108
76. 动点速度的计算问题 · · · · · 108
77. 作曲线的切线的问题 · · · · · 109
78. 导数的定义 · · · · · 111
79. 计算导数的例 · · · · · 114
80. 反函数的导数 · · · · · 116
81. 导数公式汇集 · · · · · 117
82. 函数增量的公式 · · · · · 118
83. 计算导数的几个最简单法则 · · · · · 119
84. 复合函数的导数 · · · · · 121
85. 例 · · · · · 122
86. 单侧导数 · · · · · 124
87. 无穷导数 · · · · · 124
88. 特殊情况的例子 · · · · · 125

§2. 微分 · · · · · 126
89. 微分的定义 · · · · · 126
90. 可微性与导数存在之间的关系 · · · · · 127
91. 微分的基本公式及法则 · · · · · 129
92. 微分形式的不变性 · · · · · 130
93. 微分作为近似公式的来源 · · · · · 131
94. 微分在估计误差中的应用 · · · · · 132

§3. 高阶导数及高阶微分 · · · · · 133
95. 高阶导数的定义 · · · · · 133
96. 任意阶导数的普遍公式 · · · · · 134
97. 莱布尼茨公式 · · · · · 136
98. 高阶微分 · · · · · 138
99. 高阶微分形式不变性的破坏 · · · · · 139

第六章　微分学的基本定理 …… **140**

§1. 中值定理 …… 140

100. 费马定理 …… 140
101. 罗尔定理 …… 141
102. 有限增量定理 …… 142
103. 导数的极限 …… 144
104. 有限增量定理的推广 …… 144

§2. 泰勒公式 …… 145

105. 多项式的泰勒公式 …… 145
106. 任意函数的展开式 …… 147
107. 余项的其他形式 …… 150
108. 已得的公式在初等函数上的应用 …… 152
109. 近似公式 · 例 …… 153

第七章　应用导数来研究函数 …… **157**

§1. 函数的变化过程的研究 …… 157

110. 函数为常数的条件 …… 157
111. 函数为单调的条件 …… 158
112. 极大及极小 · 必要条件 …… 159
113. 第一法则 …… 160
114. 第二法则 …… 162
115. 函数的作图 …… 163
116. 例 …… 164
117. 高阶导数的应用 …… 166

§2. 函数的最大值及最小值 …… 167

118. 最大值及最小值的求法 …… 167
119. 问题 …… 168

§3. 未定式的定值法 …… 169

120. $\frac{0}{0}$ 型未定式 …… 169
121. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 …… 172
122. 其他类型的未定式 …… 173

第八章 多元函数 · · · · · · 176
§1. 基本概念 · · · · · · 176
123. 变量之间的函数关系 · 例 · · · · · · 176
124. 二元函数及其定义区域 · · · · · · 177
125. m 维算术空间 · · · · · · 179
126. m 维空间中的区域举例 · · · · · · 181
127. 开区域及闭区域的一般定义 · · · · · · 183
128. m 元函数 · · · · · · 184
129. 多元函数的极限 · · · · · · 186
130. 例 · · · · · · 188
131. 累次极限 · · · · · · 189
§2. 连续函数 · · · · · · 191
132. 多元函数的连续性及间断 · · · · · · 191
133. 连续函数的运算 · · · · · · 193
134. 关于函数取零值的定理 · · · · · · 194
135. 波尔查诺 - 魏尔斯特拉斯引理 · · · · · · 195
136. 关于函数有界性的定理 · · · · · · 196
137. 一致连续性 · · · · · · 196

第九章 多元函数的微分学 · · · · · · 199
§1. 多元函数的导数与微分 · · · · · · 199
138. 偏导数 · · · · · · 199
139. 函数的全增量 · · · · · · 200
140. 复合函数的导数 · · · · · · 203
141. 例 · · · · · · 204
142. 全微分 · · · · · · 205
143. 一阶微分形式的不变性 · · · · · · 207
144. 全微分在近似计算中的应用 · · · · · · 209
145. 齐次函数 · · · · · · 210
§2. 高阶导数与高阶微分 · · · · · · 212
146. 高阶导数 · · · · · · 212
147. 关于混合导数的定理 · · · · · · 213
148. 高阶微分 · · · · · · 216
149. 复合函数的微分 · · · · · · 218
150. 泰勒公式 · · · · · · 219

§3. 极值、最大值与最小值 220

151. 多元函数的极值 · 必要条件 220

152. 静止点的研究 (二元函数的情况) 222

153. 函数的最大值与最小值 · 例子 225

154. 问题 227

第十章　原函数 (不定积分) 230

§1. 不定积分及其最简单的计算法 230

155. 原函数概念 (及不定积分概念) 230

156. 积分与求面积问题 233

157. 基本积分表 234

158. 最简单的积分法则 235

159. 例 237

160. 换元积分法 238

161. 例 240

162. 分部积分法 242

163. 例 242

§2. 有理式的积分 244

164. 有限形式积分法问题的提出 244

165. 简单分式及其积分 245

166. 真分式的积分 246

167. 奥斯特罗格拉茨基的积分有理部分分出法 249

§3. 某些根式的积分法 251

168. $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ 型根式的积分法 251

169. 二项式微分的积分法 252

170. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 型根式的积分法 · 欧拉替换法 254

§4. 含有三角函数及指数函数的式子的积分法 258

171. 微分式 $R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分法 258

172. 其他情形概述 260

§5. 椭圆积分 261

173. 定义 261

174. 化为典式 262

第十一章 定积分 ······ **264**
§1. 定积分定义及存在条件 ······ 264
175. 解决面积问题的另一途径 ······ 264
176. 定义 ······ 265
177. 达布和 ······ 267
178. 积分存在条件 ······ 269
179. 可积函数类别 ······ 270
§2. 定积分性质 ······ 272
180. 依有向区间的积分 ······ 272
181. 可用等式表出的性质 ······ 273
182. 可用不等式表出的性质 ······ 274
183. 定积分作为上限的函数 ······ 277
§3. 定积分的计算及变换 ······ 279
184. 用积分和的计算 ······ 279
185. 积分学基本公式 ······ 281
186. 定积分中变量替换公式 ······ 282
187. 定积分的分部积分法 ······ 283
188. 沃利斯公式 ······ 284
§4. 积分的近似计算 ······ 285
189. 梯形公式 ······ 285
190. 抛物线公式 ······ 287
191. 近似公式的余项 ······ 289
192. 例 ······ 291

第十二章 积分学的几何应用及力学应用 ······ **293**
§1. 面积及体积 ······ 293
193. 面积概念的定义 · 可求积区域 ······ 293
194. 面积的可加性 ······ 294
195. 面积作为极限 ······ 295
196. 以积分表出面积 ······ 296
197. 体积概念的定义及其性质 ······ 299
198. 以积分表出体积 ······ 301
§2. 弧长 ······ 305
199. 弧长概念的定义 ······ 305
200. 引理 ······ 307
201. 以积分表出弧长 ······ 308

202. 变弧及其微分 · · · · · · 311
203. 空间曲线的弧长 · · · · · · 313
§3. 力学及物理上的数量的计算 · · · · · · 314
204. 定积分应用程式 · · · · · · 314
205. 旋转面面积 · · · · · · 316
206. 曲线的静矩及质心的求法 · · · · · · 318
207. 平面图形的静矩及质心的求法 · · · · · · 320
208. 力功 · · · · · · 321

第十三章　微分学的一些几何应用 · · · · · · 323
§1. 切线及切面 · · · · · · 323
209. 平面曲线的解析表示法 · · · · · · 323
210. 平面曲线的切线 · · · · · · 324
211. 切线的正方向 · · · · · · 328
212. 空间曲线 · · · · · · 329
213. 曲面的切面 · · · · · · 331
§2. 平面曲线的曲率 · · · · · · 332
214. 凹向 · 拐点 · · · · · · 332
215. 曲率概念 · · · · · · 334
216. 曲率圆及曲率半径 · · · · · · 336

第十四章　数学分析基本观念发展简史 · · · · · · 339
§1. 微积分前史 · · · · · · 339
217. 17 世纪与无穷小分析 · · · · · · 339
218. 不可分素方法 · · · · · · 339
219. 不可分素学说的进一步发展 · · · · · · 341
220. 求最大及最小 (极大极小) · 切线作法 · · · · · · 343
221. 借助运动学想法来作切线 · · · · · · 345
222. 切线作法问题与求积问题的互逆性 · · · · · · 345
223. 上述的总结 · · · · · · 346
§2. 依萨克 · 牛顿 (Isaac Newton, 1642—1727) · · · · · · 347
224. 流数计算法 · · · · · · 347
225. 流数计算法的逆计算法 · 求积 · · · · · · 349
226. 牛顿的 “原理” 及极限理论的萌芽 · · · · · · 351
227. 牛顿的奠基问题 · · · · · · 351

§3. 莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) · · · 352
228. 建立新计算法的初步 · · · 352
229. 最先刊行的微分学著作 · · · 353
230. 最先刊行的积分学著作 · · · 354
231. 莱布尼茨的其他著作 · 学派的建立 · · · 355
232. 莱布尼茨的奠基问题 · · · 355
233. 结尾语 · · · 356

索引 · · · **357**

第一章　实数

---

§1. 实数集合及其有序化

1. 前言 从中学教材中读者已熟悉有理数及其性质. 同时由于初等数学的需要, 有理数域的扩张也就成为必要了. 事实上, 在有理数中甚至连正整数 (自然数[①]) 往往都没有根, 如 $\sqrt{2}$ 就是一个例子, 这就是说, 没有一个其平方能等于 2 的有理分数 $\dfrac{p}{q}$ (p 与 q 是两个自然数) 存在.

要证明这一点, 我们用反证法: 假定有这样的分数 $\dfrac{p}{q}$ 存在, 使得 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$. 我们可设这个分数是既约的, 也就是说, p 与 q 无公因子. 因为 $p^2 = 2q^2$, 所以 p 是偶数: $p = 2r$ (r 是整数), 因而, q 是奇数. 用 p 的表达式来代替 p, 得 $q^2 = 2r^2$, 由此推得 q 是偶数. 所得到的这个矛盾就证明了我们的诊断.

与此同时, 假若我们所讨论的只是含有理数的数域, 那么在几何中显然就不是所有的线段都能有长度. 事实上, 考虑边为单位长度的正方形. 它的对角线不能有有理长度 $\dfrac{p}{q}$, 因为如若不然, 则由毕达哥拉斯定理[②], 这个长度的平方就应等于 2, 但我们已知这是不可能的.

在本章中我们的任务是要扩张有理数的数域, 把具有新的性质的数 —— 无理数加入到这领域中来.

[①] 请读者注意: 原书作者屡次提到的 "自然数", 在我国的教材中相当于 "正整数", 因为原书作者所说的自然数不包括零, 这是与我国的国家标准不同的, 但自然数集仍记为 $\mathbb{N}$, 本译本中未作改动. —— 编者注.

[②] 即勾股定理. —— 编者注.

在数学实践中含有根式表达式的无理数, 事实上早在中世纪已开始出现, 不过没有把它看作是实在的数. 17 世纪由笛卡儿[①]所创立的坐标方法, 又以新的方法提出了用数来表达几何量的问题. 在这种影响下无理数与有理数同样是数的观念逐渐地成熟起来; 这种观念在牛顿的《普遍算术》(1707)[②]中所下的 (正) 数的定义里面有了透辟的叙述:

"我们所理解的数, 与其说它是单位的集合, 不如说它是任何一个量与另一个由我们取来作单位的同类量的抽象比".

这时整数与分数表达和单位可公度的量, 而无理数表达着和单位不可公度的量.

在 17 世纪萌芽而在整个 18 世纪蓬勃发展着的数学分析, 长时期内满足于这个定义, 但是它是与算术格格不入的, 并且仍然不能揭露出扩大了的数域的最重要的性质 —— *连续性* (参考后面第 5 段). 在 18 世纪末与 19 世纪初数学方面兴起了批判的潮流, 提出了数学分析的基本概念要有正确的定义以及它的基本命题要有严格的证明. 这种要求也就很快地使得根据无理数的纯粹的算术定义来建立在逻辑上没有错误的无理数理论变成了必要的事情. 在 19 世纪的 70 年代里, 有关这方面的理论已经建立了几种, 它们在形式上各不相同而实质上是一样的. 所有这些理论与有理数的各种*无穷集合*联系起来, 定义了无理数.

2. 无理数定义 我们仿效戴德金[③]来叙述无理数理论. 这种理论的基础归于有理数域内的分割的概念. 考虑把全部有理数的集合分成的两个*非空的* (即确实至少包含一个数的) 集合 A, A'; 换句话说, 我们假定

1° *每一个有理数在而且只在 A 与 A' 两个集合的一个中.*

如果下面的条件也能满足, 我们就称这种分法为分割:

2° *集合 A 中每一数 a 小于集合 A' 中每一个数 a'.*

集合 A 叫做分割的*下类*, 集合 A' 叫做*上类*. 分割用 $A|A'$ 表示.

由分割的定义推知, 凡小于下类中的数 a 的有理数, 也属于下类. 同样, 凡大于上类中的数 a' 的有理数也属于上类.

例题 1) 把 A 定义为所有一切满足不等式 $a < 1$ 的有理数 a 的集合, 而把使 $a' \geqslant 1$ 的全部有理数 a' 归入集合 A'.

不难检验, 这样一来我们就确实得到一个分割. 数 1 属于 A' 类并且显然是其中最小的数. 另一方面, 在 A 类中没有最大的数; 因为, 不论我们取 A 中怎样的数 a, 我们总可以在 a 与 1 之间指出一个有理数 a_1, 因而, a_1 大于 a 而且也属于 A 类.

2) 把所有小于或等于 1 的有理数 $a \leqslant 1$ 归入下类 A; 所有大于 1 的有理数 $a' > 1$ 归入上类 A'.

这也是一个分割, 并且这时在上类中没有最小的数, 而在下类中有最大的数 (就是 1).

[①]笛卡儿 (1596 — 1650) 是法国的著名哲学家与科学家.

[②]有俄文译本: "Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе" (АН СССР, 1948); 参考第 8 页.

[③]戴德金 (Richard Dedekind) (1831 — 1916) 是德国的数学家.

3) 把一切使 $a^2 < 2$ 的正有理数 a、零以及一切负有理数都归入 A 类, 而把一切使 $a'^2 > 2$ 的正有理数 a' 归入 A' 类.

不难证实, 我们又得到一个分割. 这时在 A 类中既无最大的数, 在 A' 类中也无最小的数. 这两个论断中, 我们可取第一个为例加以证明 (第二个可同样地证明). 设 a 是 A 类中的任一正数 (这时 $a^2 < 2$). 我们要指出, 可以选得这样的正数 n, 使得

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

这就是说, $a+\dfrac{1}{n}$ 也要属于 A 类.

这一不等式与下面的不等式是等价的:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2,$$
$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2} < 2-a^2.$$

如果 n 满足不等式 $\dfrac{2a+1}{n} < 2-a^2$, 则最后这个不等式成立; 为此, 只要取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

由此可见, 不论 a 是 A 类中怎样的一个正数, 在 A 类中总找得到大于 a 的数; 因为对于数 $a \leqslant 0$ 这个论断是很明显的, 所以 A 类中任何数不能是其中最大的数.

不难理解, 要在下类有最大的数 a_0 而同时在上类又有最小的数 a'_0, 这样的分割不能存在. 事实上, 假定有这样的分割存在. 我们就取介于 a_0 与 a'_0 之间的任一有理数 c, $a_0 < c < a'_0$. 数 c 不能属于 A 类, 因为要不这样, 那 a_0 就会不是这类中的最大数; 依同理 c 也不能属于 A' 类. 可是这与在分割概念的定义中所包含的分割的性质 1° 相矛盾.

由此可见, 分割只能有由刚才的例题 1)、2)、3) 所说明的三个类型:

1) 在下类 A 中没有最大的数, 而在上类 A' 中有最小的数 r;

2) 在下类 A 中有最大的数 r, 而在上类 A' 中没有最小的数;

3) 既在下类中没有最大的数, 又在上类中没有最小的数.

在前两种情形下我们说, 这分割由有理数 r 产生 (r 是 A 与 A' 两类中间的界数), 或者说, 这分割定义了有理数 r. 在例题 1) 与 2) 中这样的数 r 是 1. 在第三种情形下, 界数不存在, 分割不能定义任何有理数. 我们现在引进新的对象 —— 无理数, 而规定说: 任何属于类型 3) 的分割定义了某一个**无理数** α. 这个数 α 就代替着缺少了的界数, 好像我们把它插在 A 类所有的数 a 与 A' 类所有的数 a' 的中间一样. 在例题 3) 中这个新建立的数不难推想它就是 $\sqrt{2}$.

我们不再对于无理数引进统一的记号[①], 而常把无理数 α 和定义它的有理数域的分割 $A|A'$ 联系起来.

为了一致起见, 对于有理数 r 也作同样的处理, 这对我们常常是方便的. 可是对于每一个有理数 r 存在着两个定义它的分割: 在两种情形之下都是数 $a<r$ 归入下类, 数 $a'>r$ 归入上类, 而数 r 本身则可任意地或者归入下类 (这时 r 是其中最大的数), 或者归入上类 (这时 r 是其中最小的数). 为了确定起见, 我们规定: 凡说到定义有理数 r 的分割时, 总把这个数归入上类.

有理数与无理数统称为*实数*. 实数的概念是数学分析的基本概念之一, 一般地说, 也是整个数学的一个基本概念.

3. 实数集合的有序化　*由两个分割 $A|A'$ 与 $B|B'$ 分别所定义的两无理数 α 与 β, 当且仅当这两个分割相同时才算是相等*; 实际上只要 A 与 B 两个下类相同即可, 因为这时 A' 与 B' 两个上类也相同. 这个定义在 α 与 β 是有理数时也一样成立. 换句话说, *如果两个有理数 α 与 β 相等, 则定义它们的两个分割相同, 反之, 从这两个分割的相同即可推出数 α 与 β 的相等*. 在这种情况应该考虑到上面对于有理数所加上的条件.

我们现在来建立关于实数的 "大于" 的概念. 对于有理数来说这个概念已从中学课本中知道了. 对于*有理数 r 与无理数 α* 来说, "大于" 的概念实际上已在第 **2** 段中建立了: 就是说, 如果 α 是由分割 $A|A'$ 定义的, 我们就算作 α 大于所有属于 A 类的数, 而同时所有 A' 类的数都大于 α.

现在设有两个*无理数* α 与 β, 并且 α 由分割 $A|A'$ 确定, 而 β 由分割 $B|B'$ 确定. 我们把具有较大的下类的那个数算作是较大的. 确切地说, *我们算作 $\alpha>\beta$, 只要 A 类完全包含 B 类且不与 B 类相同* (这个条件显然和 B' 类完全包含 A' 类且不与 A' 类相同的条件是等价的). 不难验证, 这个定义在 α 与 β 两数中有一个为有理数时甚至两个都是有理数时也一样能成立.

"小于" 的概念就可当作派生的概念引出来. 就是说, 当且仅当 $\beta>\alpha$ 的情形下我们说 $\alpha<\beta$.

由我们的定义可以推出:

在任何两个实数 α 与 β 之间必有而且只有下列三种关系之一:

$$\alpha=\beta, \quad \alpha>\beta, \quad \alpha<\beta.$$

其次,

$$\text{从 } \alpha>\beta, \beta>\gamma \text{ 推得 } \alpha>\gamma.$$

显然也可

$$\text{从 } \alpha<\beta, \beta<\gamma \text{ 推得 } \alpha<\gamma.$$

① 这里所指的是*有限型*的记号; 在第 **4** 段中读者会遇见一种*无尽*的记号. 个别给定的无理数多半是依照它们的起源和作用来记的, 如 $\sqrt{2}$, $\log 5$, $\sin 10^\circ$, 等等.

最后, 我们要建立两个在以后的叙述上常常有用的辅助性命题.

引理 1 不论 α 与 β 是两个怎样的实数, 若 $\alpha > \beta$, 总可找到这样的一个实数 —— 甚至是**有理数** —— r, 使得 r 介于 α 与 β 之间: $\alpha > r > \beta$ (因而也有无穷多个这样的有理数).

因为 $\alpha > \beta$, 所以定义着数 α 的分割的下类 A 完全包含了对于数 β 的下类 B, 并且不与 B 相同. 所以在 A 中可找到这样的有理数 r, 它不包含在 B 中, 因而, 它属于 B'; 对于 r 有

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(等号只在 β 是有理数时才能成立). 但因在 A 中没有最大的数, 所以在必要时加大 r 可以取消等号.

引理 2 设 α 与 β 是两个给定的实数. 如果不论取怎样的有理数 $e > 0$. 总能使数 α 与 β 夹在同样两个有理数的中间:

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \quad s' \geqslant \beta \geqslant s,$$

其中

$$s' - s < e,$$

则数 α 与 β 必定相等.

证明 我们用归谬法证明. 例如, 假定 $\alpha > \beta$. 由引理 1, 在 α 与 β 之间可以插入两个有理数 r 与 $r' > r$:

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

于是对于任何两个数 s 与 s', 只要在它们的中间包含有 α 与 β, 则下面的不等式显然成立:

$$s' > r' > r > s \quad \text{或者} \quad s' - s > r' - r > 0.$$

由此可见, 差数 $s' - s$ 不符合引理中的条件, 譬如说, 不能使得它小于数 $e = r' - r$. 这个矛盾就证明了引理.

4. 实数的无尽十进小数的表示法 我们考虑实数的这样一种表示法, 使分数部分 (尾数) 是正的, 可是整数部分可正可负, 也可为零.

我们首先假定, 所考虑的实数 α 既不是整数, 也不是任何有限十进小数. 现在来求它的十进小数近似值. 如果它是由分割 $A|A'$ 所定义的数, 那么首先就易看出, 在 A 类中可找到一整数 M, 而在 A' 类中可找到一整数 $N > M$. 将 M 逐次加以 1, 我们一定可得到这样的两个相邻的整数 C 与 $C+1$, 使得

$$C < \alpha < C + 1.$$

这里的 C 可以是正的、负的或者是零.

其次, 如果把 C 与 $C+1$ 之间的区间用数

$$C.1; C.2; \cdots ; C.9$$

分成十个相等的部分, 则 α 落在其中一个 (且只一个) 部分内, 于是我们得到两个相差 $\frac{1}{10}$ 的有理数, 即 $C.c_1$ 与 $C.c_1+\frac{1}{10}$, 使得

$$C.c_1 < \alpha < C.c_1 + \frac{1}{10}.$$

继续进行这个方法, 在确定了 $n-1$ 个数字 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 以后, 我们用不等式

$$C.c_1c_2\cdots c_n < \alpha < C.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \tag{1}$$

来确定第 n 个数字 c_n.

于是在求数 α 的十进小数近似值的过程中, 我们作出了整数 C 与一无穷序列的数字 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$. 由这些数字作成的*无尽十进小数*, 记作

$$C.c_1c_2\cdots c_n\cdots, \tag{2}$$

它可以看作是实数 α 的一种表示.

例外情形, 当 α 本身就是整数, 或者一般说来是有限十进小数时, 可以用类似的方法依次地来确定数 C 与数字 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$, 只不过是从比 (1) 更一般的关系式

$$C.c_1c_2\cdots c_n \leqslant \alpha \leqslant C.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \tag{1a}$$

出发而已.

事情是这样, 在某个时候数 α 会与包含它的区间的一个端点相重合, 至于它与左端或右端重合, 那却可以随便; 从这时开始, 相应地在 (1a) 中的左边或右边就经常地出现等式. 要看这两种可能性中是那一种实现, 才决定相继的数字全部是零或全部是 9. 因此, 这时数 α 有两种表示: 一种以零来循环, 而另一种以 9 来循环, 例如,

$$2.718 = 2.718000\cdots = 2.717999\cdots,$$
$$-2.718 = \bar{3}.282 = \bar{3}.282000\cdots = \bar{3}.281999\cdots.$$

两个盈与亏的十进小数近似值

$$C.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \quad 与 \quad C.c_1c_2\cdots c_n$$

之间的差等于 $\frac{1}{10^n}$, 这个差数随着 n 的增大可以小于任意的有理数 $e>0$. 事实上, 因为不超过数 $\frac{1}{e}$ 的自然数只存在着有限多个, 所以不等式 $10^n \leqslant \frac{1}{e}$, 或者和它等价

的不等式 $\frac{1}{10^n} \geqslant e$ 只能为有限多个 n 的值所满足; 对于其余一切的 n 的值总是

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

由这个说明, 我们根据引理 2 得出结论: 凡异于 α 的数 β 不能像 α 一样满足所有的不等式 (1) 或 (1a), 因而, 它的无尽十进小数表示式不同于 α.

由此可见, 在特别情形下, 不等于任何有限小数的数, 它的表示式既不能有 0 作循环节, 也不能有 9 作循环节 —— 因为每一个以 0 或 9 作循环节的小数显然地表示一个有限十进小数.

可以证明, 如果任意地取一个无尽小数 (2), 则存在有一个实数 α, 使得小数 (2) 就是 α 的表示. 显然, 这只要作出一个数 α 使得所有的不等式 (1a) 都能够满足. 为了这个目的, 我们引进简短的记号

$$C_n = C.c_1c_2\cdots c_n \quad 与 \quad C'_n = C.c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n},$$

并注意每一个小数 C_n 都小于每一个小数 C'_m (不仅当 $m = n$ 时是这样, 而且当 $m \gtrless n$ 时也是这样). 我们现在在有理数域中作一分割: 凡大于所有的 C_n 的有理数 a' (例如所有的数 C'_m) 都放在上类 A' 中, 其余一切的有理数 (例如数 C_n 自身) 都放在下类 A 中. 不难验证, 这确实是一个分割; 它定义着所要求的实数 α.

事实上, 因为 α 是夹在两类中间的界数, 所以也就有

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n.$$

从此读者可以把这实数本身看作无尽十进小数. 在中学课本里大家知道, 循环的无尽小数表示有理数; 反之, 每一个有理数可以分解为循环小数. 由此可见, 不循环的无尽小数是用我们新介绍来的无理数表示. 这种表示法也可以作为无理数理论构造的出发点.

附注 以后我们需要利用有理数值 a 与 a' 来逼近实数 α:

$$a < \alpha < a',$$

它们的差数小于任意小的有理数 $e > 0$. 就有理数 α 而言, 数 a 与 a' 显然是存在的; 对于无理数 α, 譬如说, 我们可以采用 n 足够大时的十进小数近似值 C_n 与 C'_n 作为 a 与 a'.

5. 实数集合的连续性 现在转过来讨论全部实数集合的一个极为重要的性质, 这个性质把它和有理数集合从本质上区别开来. 在考虑有理数集合中的分割时, 我们已看到, 有时有这样一种分割存在, 使在这集合中没有产生这个分割的界数. 正是有理数集合在其内留有空隙的这种不完备性, 为引进新的数 —— 无理数提供了根

据. 我们现在开始来讨论全部实数集合中的分割. 在这种分割下, 我们把这个集合分成两个非空的并且具备下列性质的集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$:

1° 每一个实数在而且只在集合 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 的一个中;

2° 集合 $\boldsymbol{A}$ 中每一个数 α 小于集合 $\boldsymbol{A}'$ 中每一个数 α'.

于是发生一个问题: 对于这种分割来说, 究竟在实数集合中总可找到产生这个分割的界数, 或者在这集合中还存在有空隙 (这种空隙能作为再引进新数的根据)?

可以证明, 事实上这种空隙不再存在.

基本定理 (戴德金) 对于实数集合中任何的分割 $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}'$, 存在有产生这个分割的实数 β, 这个数 β: 1) 或者是下类 $\boldsymbol{A}$ 中的最大数, 2) 或者是上类 $\boldsymbol{A}'$ 中的最小数.

实数集合的这个性质叫做它的完备性, 也叫做它的连续性或密接性.

证明 用 A 表示所有属于 $\boldsymbol{A}$ 的有理数的集合, 而用 A' 表示所有属于 $\boldsymbol{A}'$ 的有理数的集合. 不难证实, 集合 A 与 A' 作成全部有理数集合的一个分割.

这个分割 $A|A'$ 定义了某一个实数 β. 它应该落在 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ 两类之一; 假定说, 它落在下类 $\boldsymbol{A}$ 中, 我们要证明这时情形 1) 要实现, 也就是说, β 是 $\boldsymbol{A}$ 中最大的数. 事实上, 假若不然, 则可找到这类中另一个大于 β 的数 α_0. 于是 (根据引理 1) 我们可在 α_0 与 β 之间插入一有理数 r:

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

r 属于 $\boldsymbol{A}$ 类, 因而也属于 A 类, 我们就得出了矛盾: 在定义数 β 的分割的下类中会有有理数 r 比 β 这个数更大! 这样我们的论断就证明了.

同样可证明, 如果 β 落在上类 $\boldsymbol{A}'$ 中, 则情形 2) 便要实现.

附注 要想在 $\boldsymbol{A}$ 类中有最大的数而同时在 $\boldsymbol{A}'$ 类中有最小的数, 这是不可能的; 这一论断可以像对于有理数域中的分割情形一样来证明 (利用引理 1).

6. 数集合的界 我们现在要利用基本定理 [**5**] 来建立在近代分析学上起重要作用的一些概念. 这些概念在讨论实数的算术运算时也是我们所需要的.

我们举出任意的实数无穷集合[①]; 它可以用任何方式给定. 例如, 自然数的集合、一切真分数的集合、在 0 与 1 之间的一切实数的集合, 方程 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 的所有根的集合, 等等, 都是无穷集合.

用 x 表示集合中任一数, 于是 x 是集合中的数的标准记号; 数 x 的集合本身用 $\mathscr{X} = \{x\}$ 表示.

如果对于所考虑的集合 $\{x\}$ 存在有这样的数 M, 使得一切的 $x \leqslant M$, 我们便说, 这个集合是 (由数 M 限制) 上有界的; 在这情形下数 M 本身是集合 $\{x\}$ 的一个上界. 例如, 真分数的集合是以数 1 或任何一个大于 1 的数为上界; 自然数列是没有上界的.

[①] 下面所说的一切对于有限的集合也保持有效, 不过这种情形是无关重要的.

与此类似: 如果能找到这样的数 m, 使得一切的 $x \geqslant m$, 则称集合 $\{x\}$ 是 (由数 m 限制) 下有界的, 而数 m 本身叫做集合 $\{x\}$ 的一个下界. 例如, 自然数列是以数 1 或任何一个比 1 小的数为下界的; 真分数集合是以数 0 或任何一个负数为下界的.

上 (下) 有界的集合可以同时是下 (上) 有界的, 也可以不是下 (上) 有界的. 例如, 真分数的集合是下有界而又上有界的, 可是自然数列只是下有界而不是上有界的.

如果一集合不是上 (下) 有界的, 则取 "广义的数" $+\infty(-\infty)$ 作为它的上界 (下界). 记号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 读作 "正无穷大" 与 "负无穷大". 对于这两个 "广义的" 或 "无穷大的" 数, 我们算作

$$-\infty < +\infty \quad \text{与} \quad -\infty < \alpha < +\infty,$$

不论 α 是怎样一个 ("有限的") 实数.

如果一个集合是上有界的集合, 就是说, 有着有限的上界 M, 则它同时也有着无穷多个上界 (因为任何一个大于 M 的数也都是它的上界). 在所有的上界中特别重要的是最小的一个, 我们称它为*上确界*. 同样, 如果一集合是下有界的, 那我们就称所有下界中的最大者为*下确界*. 例如, 就一切的真分数的集合言, 它的两个确界是 0 与 1.

然而问题是: 对于上 (下) 有界的集合是否总存在有上 (下) 确界? 实际上, 因为在这情形下所有的上界 (下界) 形成一无穷集合, 而在数的无穷集合中未必总有最大的或最小的数[①], 所以在所考虑的集合的所有上 (下) 界中, 这种最小的 (最大的) 数的存在性需要加以证明.

定理 *如果集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 是上 (下) 有界的, 则它一定有上 (下) 确界*[②].

证明 我们就上确界来进行论证. 考虑下面两种情况:

1° 首先假定*在集合 $\mathscr{X}$ 的数 x 中可找到最大的数 $\bar{x}$*. 于是集合中的所有数都要满足不等式 $x \leqslant \bar{x}$, 就是说, $\bar{x}$ 是 $\mathscr{X}$ 的上界. 另一方面, $\bar{x}$ 属于 $\mathscr{X}$; 因此, 对于任何的上界 M 不等式 $\bar{x} \leqslant M$ 成立. 由此肯定, $\bar{x}$ 是集合 $\mathscr{X}$ 的上确界.

2° 现在设*在集合 $\mathscr{X}$ 的数 x 中没有最大的数*. 我们用下面的方法作出全部实数区域中的分割. 把集合 $\mathscr{X}$ 的一切上界 α' 归入上类 $\boldsymbol{A}'$, 而把其余一切的实数 α 归入下类 $\boldsymbol{A}$. 在这个分法之下集合 $\mathscr{X}$ 所有的数 x 都落在 $\boldsymbol{A}$ 类, 因为由假设, 其中任何一个数都不是最大的. 可见 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 两类都不是空的. 这个分法实际上是一个分割, 因为全部实数都分布在这两类中, 并且 $\boldsymbol{A}'$ 类中每个数大于 $\boldsymbol{A}$ 类中任何的数. 根据戴德金的基本定理 [**5**], 一定有一个作成这个分割的实数 β 存在. 属于 $\boldsymbol{A}$ 类的一切数 x 不能超过这个 "界数" β, 就是说, β 是对于 x 的一个上界, 因此, β 本身属于

[①]例如, 在所有的真分数中就没有最大与最小的数.

[②]1817 年捷克的哲学家兼数学家伯恩哈德 · 波尔查诺 (1781—1848) 首先发表了这个定理 —— 不过是用另外一些术语叙述的. 它的严格的证明只有确定了实数概念以后才能够有.

$\boldsymbol{A}'$ 类而且是 $\boldsymbol{A}'$ 中最小的数. 由此可见, 作为一切上界中最小者的数 β, 就是所要求的集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 的上确界.

定理的第二部分 (关于下确界的存在性) 完全可同样地证明.

若 M^* 是数集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 的上确界, 则对于一切的 x 有

$$x \leqslant M^*.$$

现在取任一个小于 M^* 的数 α. 因为 M^* 是上界中的最小者, 所以数 α 一定不是集合 $\mathscr{X}$ 的上界, 就是说, 可在 $\mathscr{X}$ 中找到这样的数 x', 使得

$$x' > \alpha.$$

集合 $\mathscr{X}$ 的上确界 M^* 的特征完全由这两个不等式表达出来.

同样, 集合 $\mathscr{X}$ 的下确界 m^* 的特征可如下描述之: 对于一切的 x 有

$$x \geqslant m^*,$$

并且, 不论 β 是怎样一个大于 m^* 的数, 总可在 $\mathscr{X}$ 中找到这样的数 x'', 使得

$$x'' < \beta.$$

关于数集合 $\mathscr{X}$ 的上确界 M^* 与下确界 m^* 的记法, 我们采用符号

$$M^* = \sup \mathscr{X} = \sup\{x\}, \quad m^* = \inf \mathscr{X} = \inf\{x\}$$

(按拉丁语: supremum = 最高的, infimum = 最低的).

我们指出以后时常会遇到的一个明显的推理:

若一集合的全部数 x 满足不等式 $x \leqslant M$, 则

$$\sup\{x\} \leqslant M.$$

事实上, 数 M 是集合的所有上界中的一个, 所以一切上界中的最小者不能超过它.

同样, 从不等式 $x \geqslant m$ 推出 $\inf\{x\} \geqslant m$.

最后我们规定, 如果集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 不是上有界的, 则称它的上确界是 $+\infty$: $\sup\{x\}=+\infty$. 同样, 如果集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 不是下有界的, 则称它的下确界是 $-\infty$: $\inf\{x\}=-\infty$.

§2. 实数的四则运算

7. 实数的和的定义及其性质 设有两个实数 α 与 β. 我们开始考虑满足不等式

$$a < \alpha < a', \quad b < \beta < b' \tag{1}$$

的有理数 a, a' 与 b, b'.

所谓数 α 与 β 之和 $\alpha+\beta$ 是这样的一个实数 γ, 它介于所有形如 $a+b$ 之和与所有形如 $a'+b'$ 之和的中间:

$$a+b<\gamma<a'+b'. \tag{2}$$

首先我们要证明, 对于任何一对实数 α 与 β 存在有这样的数 γ.

考虑所有一切可能的和 $a+b$ 的集合. 这个集合是上有界的, 譬如说, 是以任何一个形如 $a'+b'$ 的和为上界的. 我们就令 [**6**]

$$\gamma=\sup\{a+b\}.$$

于是 $a+b\leqslant\gamma$, 并且同时 $\gamma\leqslant a'+b'$.

因为不论 a,b,a',b' 是满足 (1) 中各条件的怎样的有理数, 总能够加大 a,b 两数, 减小 a',b' 两数, 而仍保持这些条件, 所以在刚才所得到的带有等号的不等式中实际上没有一处能成立等式. 由此可见, 数 γ 满足和的定义.

可是, 问题发生在和 $\gamma=\alpha+\beta$ 是否由不等式 (2) 唯一地确定. 为了要证实和的唯一性, 我们 (按照第 **4** 段中的附注) 取有理数 a,a',b,b', 使得

$$a'-a<e \quad 与 \quad b'-b<e,$$

其中 e 是任意小的一个正有理数. 由此得

$$(a'+b')-(a+b)=(a'-a)+(b'-b)<2e,$$

这就是说, 这个差数可以使得它任意地小[①]. 于是由引理 2, 在和数 $a+b$ 与 $a'+b'$ 的中间存在着唯一的一个数.

最后, 我们注意, 如果 α 与 β 是两个有理的数, 则它们的普通的和 $\gamma=\alpha+\beta$ 显然满足不等式 (2). 因此, 上面所给的两个实数之和的一般定义与两个有理数之和的旧定义是不矛盾的.

对于实数来说, 加法的所有基本性质仍然可以保持:

$$1)\ \alpha+\beta=\beta+\alpha, \quad 2)\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), \quad 3)\ \alpha+0=\alpha,$$

最后, 有

4) 由 $\alpha>\beta$ 推得 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

根据前面所给的和的定义以及有理数的一些熟知的性质, 不难证明上面四个性质; 我们在这里不去谈它. 利用最后一个性质可证实, 两个 (同向) 不等式的对应项逐项相加不等号仍然保持.

8. 对称数[②] · 绝对值 我们现在来证明, 对于每一个实数 α 存在有满足条件 $\alpha+(-\alpha)=0$ 的 (对称的) 数 $-\alpha$.

这时只要考虑无理数 α 的情形.

假定数 α 由分割 $A|A'$ 确定, 我们用下面的方法来定义数 $-\alpha$. 把一切的有理数 $-a'$ (其中 a' 是 A' 类中任意的数) 归入数 $-\alpha$ 的下类 $\overline{A}$, 而把一切的数 $-a$ (其中 a 是 A 类中任意的数)

---

① 只要取 $e<\dfrac{e'}{2}$, 数 $2e$ 就会小于任意的数 $e'>0$.

② 在我国的中学教材中称为 "相反数". —— 编者注

归入这个数的上类 $\overline{A'}$. 不难看出, 所作的分法是一个分割, 并且实际上定义着一个实数 (在现在的情形下是无理的); 用 $-\alpha$ 表示这个数.

我们现在要查实它满足上面所说的条件. 利用数 $-\alpha$ 本身的定义, 我们知道, 和 $\alpha+(-\alpha)$ 是夹在形如 $a-a'$ 与 $a'-a$ 的两数中间的实数, 其中 a 与 a' 是有理数并且 $a<\alpha<a'$. 可是, 很明显,

$$a-a'<0<a'-a,$$

这就是说, 数 0 是夹在刚才所说的两数中间. 根据具有这种性质的数的唯一性, 我们得到

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

这就是所要证明的.

再补充说一句, 与已知数对称的数也一样具有这些性质;

$$-(-\alpha)=\alpha,\quad -(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta).$$

利用对称数的概念可以把*减法*看作加法的逆运算而解决实数中的减法问题. 所谓 α 与 β 之差 (也用 $\alpha-\beta$ 表示) 是满足条件

$$\gamma+\beta=\alpha\ (\text{或}\ \beta+\gamma=\alpha)$$

的一个数 γ. 根据加法的性质, 不难证明, 这样的数是 $\gamma=\alpha+(-\beta)$; 实际上,

$$\begin{aligned}\gamma+\beta&=[\alpha+(-\beta)]+\beta=\alpha+[(-\beta)+\beta]\\&=\alpha+[\beta+(-\beta)]=\alpha+0=\alpha.\end{aligned}$$

同样可以建立*差的唯一性*.

从第 **7** 段中的性质 4) 可以作出关于两不等式

$$\alpha>\beta\quad\text{与}\quad\alpha-\beta>0$$

的*等价性*的有用的说明, 由这一说明即可确立由 $\alpha>\beta$ 引出 $-\alpha<-\beta$ 的事实.

最后, 数的*绝对值*的概念也与对称数的概念有联系. 从对称数本身的构造发现了: 当 $\alpha>0$ 时必然 $-\alpha<0$, 而由 $\alpha<0$ 推得 $-\alpha>0$. 换句话说, 只要 $\alpha\neq0$, 就知 α 与 $-\alpha$ 两数中有一个 (而且只有一个) 要大于零; 它就是我们所说的数 α 与数 $-\alpha$ 的*绝对值*, 用记号

$$|\alpha|=|-\alpha|$$

来表示. 数零的绝对值定为零: $|0|=0$.

关于绝对值我们也给出在以后有用的两个说明.

首先我们要确认, 不等式 $|\alpha|<\beta$ (其中自然有 $\beta>0$) 与二重不等式 $-\beta<\alpha<\beta$ 是等价的.

事实上, 从 $|\alpha|<\beta$ 推得同时有 $\alpha<\beta$ 与 $-\alpha<\beta$, 就是 $\alpha>-\beta$. 反之, 如果已知 $\alpha<\beta$ 与 $\alpha>-\beta$, 那就同时有 $\alpha<\beta$ 与 $-\alpha<\beta$; 可是数 α 与 $-\alpha$ 中的一个是 $|\alpha|$, 可见一定是 $|\alpha|<\beta$.

同样, 不等式

$$|\alpha|\leqslant\beta\quad\text{与}\quad-\beta\leqslant\alpha\leqslant\beta$$

也是等价的.

其次, 我们来证明有用的不等式

$$|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

把显明的不等式

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad 与 \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|$$

逐项加起来, 我们得到

$$-(|\alpha|+|\beta|) \leqslant \alpha+\beta \leqslant |\alpha|+|\beta|,$$

于是根据上面所作的说明就推出所要求的不等式.

利用数学归纳法可把已证明的不等式推广到含有任意多个项的情形. 此外, 不难得到

$$|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha|-|\beta|,$$

以及

$$|\alpha|-|\beta| \leqslant |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

因为同时又有

$$|\beta|-|\alpha| \leqslant |\alpha-\beta|,$$

所以显然有

$$\big||\alpha|-|\beta|\big| \leqslant |\alpha-\beta|.$$

所有这些不等式以后都是常常有用的.

9. 实数的积的定义及其性质 我们首先就正的数来谈实数的乘法. 设已给两个这样的数 α 与 β. 这时我们也来考虑满足不等式 (1) 的所有一切可能的有理数, 但是我们假定这些数都是正的.

所谓两个正的实数 α 与 β 的积 $\alpha\beta$, 是这样的一个实数 γ, 它介于一切形如 ab 的积与一切形如 $a'b'$ 的积之间:

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{3}$$

要证明这样的数 γ 的存在性, 我们取所有一切可能的积 ab 的集合; 它是以任何形如 $a'b'$ 的积为上界的. 如果令

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

则自然有 $ab \leqslant \gamma$, 而且同时有 $\gamma \leqslant a'b'$.

像在和的情形一样, 可以加大数 a, b 而减小数 a', b' 借以去掉这里的等号, 所以数 γ 满足积的定义.

积的唯一性可根据下面的理由推出来. 取有理数 a, a' 与 b, b', 使得 (参考第 **4** 段中的附注)

$$a'-a<e \quad 与 \quad b'-b<e,$$

其中 e 是任意小的正有理数. 这时可以算作数 a 与 b 是正的, 而数 a' 与 b' 分别不超过预先规定的某两个数 a_0' 与 b_0'. 于是差数

$$a'b'-ab = a'(b'-b)+b(a'-a) < (a_0'+b_0')e,$$

就是说, 可以使得这个差数任意地小[①], 而由引理 2, 这就足以肯定只有一个数 γ 能够满足不等式 (3).

如果 α 与 β 二正数都是有理数, 则它们的普通的积 $\alpha\beta$ 显然满足不等式 (3), 就是说, 与按两实数之积的一般定义得到的结果是一样的 —— 并无矛盾.

最后, 为了要定义任意一对实数 (不一定是正的) 的积, 我们作出下面的规定.

首先我们规定

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0,$$

不论 α 是怎样的实数.

如果两个乘数都不为零, 我们就根据通常的 "符号规则" 令:

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \text{当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 同号},$$
$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \quad \text{当 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 异号}$$

(这就是我们已经知道的正数 $|\alpha|$ 与 $|\beta|$ 的积).

像在有理数的情形一样, 对于任何实数保持有下面的性质:

$$1)\ \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \quad 2)\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma), \quad 3)\ \alpha \cdot 1 = \alpha,$$
$$4)\ (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma,$$

而且

5) 从 $\alpha > \beta$ 与 $\gamma > 0$ 推得 $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

利用最后这个性质可证实, 具有正项的两个 (同向) 不等式逐项相乘不等号仍然保持.

如果定义 α 与 β 二数之商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 是这样的数 γ, 它满足条件

$$\gamma \cdot \beta = \alpha \ (\text{或 } \beta \cdot \gamma = \alpha),$$

则可以建立商的存在性与唯一性, 只要除数 β 不为零.

在结束实数的四则运算时, 我们再一次着重指出, 作为初等代数的基础的有理数的所有基本性质, 对于实数也都成立. 因此, 有关四则运算以及等式和不等式的结合, 所有这些代数法则对于实数都保持有效.

§3. 实数的其他性质及其应用

10. 根的存在性 · 具有有理指数的乘幂 像平常一样, 由实数的乘法 (与除法) 的定义可直接引出具有正 (与负) 整指数的乘幂的定义. 要一般地来谈具有有理指数的乘幂, 我们先讲述一下根的存在问题.

我们还记得, 在有理数域中最简单的根数都会不存在, 这一事实提供了扩充有理数域的一个根据; 我们来检查一下, 扩充了的数域 (这时不作进一步的扩充) 在何种程度上弥补了旧有的缺陷.

设 α 是任一实数, n 是自然数.

[①] 我们看出, 只要取 $e < \dfrac{e'}{a_0' + b_0'}$, 数 $(a_0' + b_0')e$ 就会小于任何的数 $e' > 0$.

大家知道, 所谓数 α 的 n 次方根是使

$$\xi^n = \alpha$$

的这样一个实数 ξ.

我们限定 α 是正数的情形来求满足这关系式的正数 ξ, 也就是, 求所谓的根的算术值. 我们来证明这样的数 ξ 总存在并且只有一个.

关于数 ξ 的唯一性的断语立即可从以下事实推得, 那就是, 不同的正数有其不同的乘幂: 如果 $0 < \xi < \xi'$, 则 $\xi^n < \xi'^n$.

如果存在这样的正有理数 γ, 它的 n 次乘幂等于 α, 则它就是所要求的数 ξ. 所以今后只限于这种有理数不存在的情形.

我们现在用下面的方法作出全部有理数域的分割 $X|X'$. 把全部负有理数、零以及使得 $x^n < \alpha$ 的全部正有理数 x 归 X 类, 而把使得 $x'^n > \alpha$ 的全部正有理数 x' 归入 X' 类.

不难看出, 这两类都不是空的并且 X 里有正数. 如果取数 (比如说是自然数) m 使得 $\frac{1}{m} < \alpha < m$, 则更加有 $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$, 于是数 $\frac{1}{m}$ 属于 X, 而数 m 属于 X'.

对于分割的其他要求可以直接检验.

现在设 ξ 是由分割 $X|X'$ 所确定的数, 我们要证明, $\xi^n = \alpha$, 也就是 $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$.

把 ξ^n 看作是等于 ξ 的 n 个因子的乘积, 根据正实数之积的定义我们肯定, 如果 x 与 x' 是使

$$0 < x < \xi < x'$$

的有理数, 则

$$x^n < \xi^n < x'^n.$$

因为, 很显然, x 属于 X 类, 而 x' 属于 X' 类, 所以由这两类的定义, 同时又有

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

可是差数 $x' - x$ 可以小于任意的数 $e > 0$ (参考第 **4** 段中的附注), 并且不妨把 x' 算作小于某一预先固定的数 x'_0. 在这种情况下差数

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \cdots + x^{n-1}) < e \cdot n x_0'^{n-1},$$

也就是说, 可以使得它任意地小[①]. 于是由引理 2, 推得数 ξ^n 与 α 的等式.

根的存在性既经证明后, 用通常的方法可以建立具有任何有理指数 r 的乘幂的概念, 并且可以检验在初等代数课本中所介绍的普通法则对于这种乘幂也是正确的:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^r}{\beta^r}, \text{ 等等.}$$

我们着重指出, 当 $\alpha > 1$ 时乘幂 α^r 随着有理指数 r 的增大而增大.

---

① 我们看出, 只要取 $e < \frac{e'}{n x_0'^{n-1}}$, 数 $e \cdot n x_0'^{n-1}$ 就要小于任意的数 $e' > 0$.

11. 具有任何实指数的乘幂 我们来定义具有任何实指数 β 的任何 (正的) 实数 α 的乘幂. 在讨论中我们要引进数 α 的乘幂

$$\alpha^b \quad 与 \quad \alpha^{b'},$$

其中指数 b 与 b' 是满足不等式

$$b < \beta < b'$$

的有理数.

所谓具有指数 β 的数 $\alpha > 1$[①] 的乘幂 (用记号 α^β 表示) 是这样的一个实数 γ, 它介于 α^b 与 $\alpha^{b'}$ 两个乘幂之间:

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \tag{1}$$

不难证实, 这样的数总存在. 实际上, 乘幂的集合 $\{\alpha^b\}$ 是上有界的, 譬如说, 是以任何的乘幂 $\alpha^{b'}$ 为上界的. 于是我们取 [**6**]

$$\gamma = \sup_{b<\beta}\{\alpha^b\}.$$

对于这个数我们有

$$\alpha^b \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{b'}.$$

事实上, 在这里等号是不需要的, 因为把 b 加大而把 b' 减小是可以的; 于是所作出的数 γ 满足条件 (1).

现在转回来证明由这些条件所确定的数的唯一性.

为此, 首先我们要注意到, 如果不要求数 s, s' 与 e 一定为有理数, 则第 **3** 段中的引理 2 仍保持有效; 证明也一样.

其次我们要建立一个很简单的但常有用的不等式: 若 n 是大于 1 的自然数并且 $\gamma > 1$, 则

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{2}$$

实际上, 令 $\gamma = 1 + \lambda$, 其中 $\lambda > 0$, 则由牛顿的二项式公式我们有

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots;$$

因为其中未写出来的项都是正的, 所以

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

这与不等式 (2) 是等价的.

在这不等式中令 $\gamma = \alpha^{\frac{1}{n}}$ $(\alpha > 1)$, 我们得到不等式

$$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}, \tag{3}$$

它是我们现在要利用的不等式.

我们知道 (第 **4** 段中附注), 可以选取数 b 与 b', 使得差数 $b' - b$ 对于任一预先给定的自然数

[①] 可以只讨论这种情形, 因为当 $\alpha < 1$ 时, 我们可令 $\alpha^\beta = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$.

n 都会小于 $\frac{1}{n}$, 并且 b' 小于一固定的数 b_0'; 于是由不等式 (3), 得

$$\alpha^{b'} - \alpha^{b} = \alpha^{b}(\alpha^{b'-b} - 1) < \alpha^{b}(\alpha^{\frac{1}{n}} - 1) < \alpha^{b} \cdot \frac{\alpha - 1}{n};$$

结果有

$$\alpha^{b'} - \alpha^{b} < \alpha^{b_0'} \cdot \frac{\alpha - 1}{n}.$$

最后这个表达式由于依赖于 n 而可使得它小于任意的正数 ε: 这只要取

$$n > \frac{\alpha^{b_0'}(\alpha - 1)}{\varepsilon}.$$

在这种情况下, 按照上面推广了的引理 2, 在界数 α^{b} 与 $\alpha^{b'}$ 之间不能包含两个不同的数 γ.

如果 β 是有理数, 则上面所给的定义回到我们的通常记号 α^{β} 的意义.

不难检验, 对于具有任意的实指数的乘幂, 所有关于乘幂的普通法则都成立, 而且当 $\alpha > 1$ 时乘幂 α^{β} 随着实指数 β 的增大而增大.

12. 对数 利用具有任意实指数的乘幂的定义, 现在不难确定以异于 1 的正实数 α (譬如说, 我们算作 $\alpha > 1$) 为底的任何正实数 γ 的对数的存在.

如果存在这样的有理数 r, 使得

$$\alpha^{r} = \gamma,$$

则 r 就是所求的对数. 我们假定这种有理数 r 不存在.

于是在全部有理数域中按下面的方法作出分割 $B|B'$. 把所有使 $\alpha^{b} < \gamma$ 的有理数 b 归入 B 类, 而把所有使 $\alpha^{b'} > \gamma$ 的有理数 b' 归入 B' 类.

我们来证明, B 与 B' 两类不是空的. 由不等式 (2) 得

$$\alpha^{n} > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

并且只要取

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1},$$

就有 $\alpha^{n} > \gamma$; 这样的自然数 n 属于 B' 类. 同时我们有:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^{n}} < \frac{1}{n(\alpha - 1)},$$

并且只要取

$$n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)},$$

就有 $\alpha^{-n} < \gamma$, 而数 $-n$ 落在 B 类中.

对于分割所提出的其他要求, 在这里也都满足.

所作的分割 $B|B'$ 确定了实数 β, 它是夹在这两类数中间的 "界数". 按乘幂的定义我们有

$$\alpha^{b} < \alpha^{\beta} < \alpha^{b'} (b < \beta < b'),$$

并且 α^{β} 是满足所有类似不等式的唯一的数. 可是对于数 γ (按照分割本身的构造) 我们有

$$\alpha^{b} < \gamma < \alpha^{b'}.$$

因此,

$$\alpha^{\beta} = \gamma \quad 而 \quad \beta = \log_{\alpha} \gamma;$$

对数的存在已证明.

13. 线段的测量 只有有理数的集合不能给予一切线段以长度, 这也是引进无理数的最重要的原因. 我们现在来证明, 有了扩充了的数的概念就足以解决线段的测量问题.

首先我们来叙述问题本身.

我们要求对于每一条直线段 A, 有一个叫做 "线段 A 的长度" 的正实数 $l(A)$ 和它对应, 使得

1) 一个预先选定的线段 E ("长度的标准") 有单位长度: $l(E)=1$;

2) 相等的线段有同样的长度;

3) 在加法下, 两线段之和的长度总是等于两线段的长度之和:

$$l(A+B)=l(A)+l(B)$$

("可加性").

在所提的几个条件下问题的解答是唯一的.

由 2) 与 3) 推知, 标准长度的 q 分之一应有长度 $\frac{1}{q}$; 如果把这个部分重复加到 p 次, 则所得的线段由 3) 应有长度 $\frac{p}{q}$. 由此可见, 如果线段 A 与标准长度是可公度的, 并且用线段 A 与 E 的公共测度分别在它们上面可量 p 与 q 次, 则一定

$$l(A)=\frac{p}{q}.$$

不难看出, 这个数不信赖于所取的公共测度, 并且, 如果对于与标准长度可公度的线段按这个法则各给以有理的长度, 则 (对于这些线段) 测量的问题就完全解决.

如果线段 A 大于线段 B, 因而 $A=B+C$, 此处 C 也是一个线段, 则由 3) 应该有:

$$l(A)=l(B)+l(C),$$

并且, 因为 $l(C)>0$, 所以 $l(A)>l(B)$. 于是不同的线段应有不同的长度, 也就是较大的线段有较大的长度.

因为每一个正有理数 $\frac{p}{q}$ 是一个与标准长度 E 可公度的线段的长度, 所以根据所述, 可知任何一个与标准长度不可公度的线段不能有有理的长度.

再设 Σ 是这样一个与 E 不可公度的线段. 试求线段 S 与 S' 的一个无穷集合, 其中 S, S' 都与 E 是可公度的, 并且分别地小于或大于 Σ. 如果令

$$l(S)=s, \quad l(S')=s',$$

则所求的长度 $l(\Sigma)$ 应满足不等式

$$s<l(\Sigma)<s'^{①}.$$

如果分全部有理数为 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}'$ 两类, 把数 s (除此以外, 还有一切负数与零) 归入下类 $\boldsymbol{S}$, 而把数 s' 归入上类 $\boldsymbol{S}'$, 则得到有理数集合的一个分割. 因为在下类中显然没有最大的数, 而在上类中没有最小的数, 所以由这个分割确定的无理数 σ 是满足不等式 $s<\sigma<s'$ 的唯一的实数. 就是说, 必须令长度 $l(\Sigma)$ 等于这个数.

① 自然, 对于与 E 可公度的线段 Σ 的长度, 这些不等式也成立.

我们现在假定, 按照所说的法则对所有与 E 可公度的以及与 E 不可公度的全部线段都给予了长度. 条件 1)、2) 显然是成立的.

考虑具有长度

$$\rho = l(P), \quad \sigma = l(\Sigma)$$

的两个线段 P, Σ 以及它们的和 $T = P + \Sigma$, T 的长度记为 $\tau = l(T)$. 取任意的正有理数 r, r', s, s', 使得

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

我们作出线段 R, R', S, S', 使得这些数正好分别地是它们的长度. 线段 $R + S$ (长度是 $r + s$) 小于 T, 而线段 $R' + S'$ (长度是 $r' + s'$) 大于 T. 所以

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

可是 [**7**] 和 $\rho + \sigma$ 是包含在数 $r + s$[①] 与数 $r' + s'$ 中间的唯一的实数, 因此有 $\tau = \rho + \sigma$. 这就是所要证明的.

用数学归纳法可把 "可加性" 扩充到任何有限多个项的情形.

如果在轴 (有向直线) 上 (图 1) 选取原点 O 与长度标准 E, 则这直线上每一点 X 对应于某一实数 —— 它的横坐标 x, 这一个数 x 等于线段 OX 的长度, 或者这个长度的负数, 依点 X 落在从 O 出发的正向或负向而定.

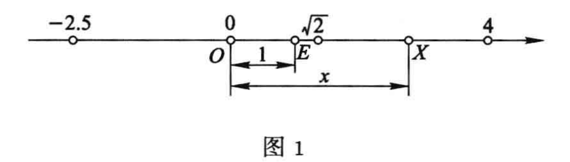


图 1

我们自然要问逆命题是否也正确. *是否每一个实数也对应于直线上某一个点?* 这个问题在几何上的回答是肯定的, 那就是利用对直线所建立的直线的连续性公理, 即把直线看作是点集合时类似于实数集合的连续性的那样一种性质 [第 **5** 段].

由此可见, 在全部实数与有向直线 (轴) 的全部点之间可以建立双方单值的对应. 实数可以表示成轴上的点, 因此我们称这轴为实数轴. 我们今后经常要应用与此类似的表示法.

---

①由正数 r 与 s 所定的界限自然是无关重要的.

第二章　一元函数

§1. 函数概念

14. 变量　在研究自然现象时以及在实践活动中, 人们会遇到许多不同的物理量; 如时间、长度、体积、速度、质量、力, 等等都是. 其中每个量, 按照考察它的问题里面的条件, 或者取不同的一些值, 或者只取一个值. 在第一种情形下我们涉及*变量*, 而在第二种情形下则涉及*常量*.

如果选取一定的测量单位 (例如, 像我们在第 **13** 段中谈到长度时一样去做), 则量的每个值可用数来表达. 数学通常抽去所考察的量的物理意义而只注意它们的数值. 这就是恩格斯所说的合理的抽象化的过程[①]. 恩格斯认为 "纯数学是以现实世界的空间的形式和数量的关系 —— 这是非常现实的资料 —— 为对象的", 并接着说:

"可是为要能够在其纯粹状态中去研究这些形式和关系, 那么就必须完全使它们脱离其内容, 把内容放置一边作为不相干的东西; 这样我们就得到没有面积的点, 没有厚度和宽度的线, a 和 b, x 和 y, 常数和变量; ······"[②]

变量之引入数学 —— 这件事通常是与笛卡儿的名字相联系着的 —— 乃是一件重要的大事. 这样数学就不仅提供了可能来建立一些常量间的数量关系, 而且也提供了可能来研究变量所参与的在自然界中进行着的过程. 恩格斯[③] 用下面的话着重指出了这一点:

"*笛卡儿的变量是数学中的转折点. 因此运动和辩证法便进入了数学, 因此微分与积分也就立刻成为必要的了* ······"

---

① 恩格斯. 反杜林论. 北京: 人民出版社, 1956: 37–38.
② 恩格斯. 反杜林论. 北京: 人民出版社, 1956: 37–38.
③ 恩格斯. 自然辩证法. 北京: 人民出版社, 1955: 217.

15. 变量的变域 在数学分析中 —— 只要不是谈它的应用 —— 所谓变量自然是指抽象的, 或者是数的变量. 它们可用任何一种用来记载数值的记号 (例如字母 x) 来表示. 如果变量 x 可取得的一些值的集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 已经指出, 我们就认为变量 x 是已知的. 这一个集合又叫做变量 x 的变域. 一般说来, 任何的数集合都可以当作变量的变域.

常量可以看作变量的特殊情形: 它与集合 $\mathscr{X}=\{x\}$ 是由一个元素组成的假定相符合.

在第 **13** 段中我们已知道, 数在几何上可以解释为数轴上的点. 变量 x 的变域 $\mathscr{X}$ 就可用这轴上的点集合来表示. 因此, 变量的数值常称为点.

常会遇到取所有自然数值

$$1,2,3,\cdots,100,101,\cdots$$

的变量 n; 这变量的变域就是全体自然数集合 $\{n\}$, 我们总用 $\mathbb{N}$ 来表示它.

可是在分析中通常研究的是所谓连续地或密接地变化着的变量: 如动点所经过的时间、路程等的物理量, 就是这种变量的原形. 数的区间就是这一类的变量的变域. 通常, 区间是以两个实数 a 与 $b(a<b)$ —— 它的两个端点 —— 为界限的有限区间, 两端点本身可以包含在区间内, 也可以不包含在内. 因此, 我们可把区间分为:

闭区间 $[a,b]: a\leqslant x\leqslant b$ (两端点包括在内);

半开区间 $\begin{cases}(a,b]: & a<x\leqslant b\\ [a,b): & a\leqslant x<b\end{cases}$ (仅一端点包括在内);

开区间 $(a,b): a<x<b$ (任一端点都不包括在内).

在各种情形下都称数 $b-a$ 为区间的长度.

不难理解, 数轴上的线段是数的区间的几何表示, 并且 —— 按照区间的类型 —— 线段的端点可归入线段, 也可不归入线段.

有时也要考虑无穷区间, 用 "广义的" 数 $-\infty,+\infty$ 作为它的一端或两端. 它们的记号和上面所引进的相类似. 例如, $(-\infty,+\infty)$ 是全体实数集合; $(a,+\infty)$ 表示满足不等式 $x>a$ 的所有数 x 作成的集合; 区间 $(-\infty,b]$ 由不等式 $x\leqslant b$ 来定义. 无穷区间在几何上可用两端无限伸延的直线或射线来表示.

16. 变量间的函数关系 · 例题 在数学分析中研究的对象不是一个变量独自的变化, 而是在两个或多个变量的共同变化下来研究它们之间的相依关系. 我们现在只限于讨论两个变量的最简单的情形.

在科学及生活的各种领域内 —— 在数学上、物理上、工程上 —— 读者已屡见这种共同变化的一些变量. 它们不能同时 (在各自的变域中) 各取任意的值; 如果已给定其中一变量 (自变量)的一个具体的值, 则另一变量 (因变量或函数) 的值也就跟着确定. 我们来介绍几个例子.

1) 圆的面积 Q 是它的半径 R 的函数; 它的数值可以从给定的半径数值用已知的公式

$$Q = \pi R^2$$

计算出来.

2) 在受重力作用的质点自由下落的情形下 —— 不计其阻力 —— 从运动开始计算起的时间 t(s) 与在这时间内所经过的路程 s(m) 是由方程

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

来联系的, 其中 $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ 是重力加速度. 于是与所取的时间 t 相对应的数值 s 也就被确定: 路程 s 是所经过的时间 t 的函数.

3) 考察某种在汽缸的活塞下面的 (理想) 气体. 在温度保持不变的假设下, 这气体的体积 V(升) 与压力 p(大气压) 就服从玻意耳 – 马略特定律:

$$pV = c = 常数.$$

如果任意地改变 V, 则 p 作为 V 的函数就由公式

$$p = \frac{c}{V}$$

唯一地确定.

还要指出, 在所考察的两个量中选取自变量有时是随意的, 有时要看是否简单便利而作选择. 在大多数情形下自变量的选择是由进行研究的目的来决定的. 例如, 在上述例题中我们也可以考虑体积 V 依赖于在活塞上的 (由气体传递的) 外压力 p, 而这压力是变化着的; 于是它自然可以写成下面形状:

$$V = \frac{c}{p},$$

p 算作是自变量, 而 V 是 p 的函数.

在另外一些情形下, 函数相依关系表征出实际按时间进行着的过程, 特别是, 像在例 2) 中一样, 时间本身就是自变量. 可是, 如果以为变量的变化总是与经过的时间相联系的, 那就是错误的. 在例 1) 中研究圆的面积与其半径的相依关系时, 我们并没有涉及任何的时间过程.

17. 函数概念的定义 像平常一样, 我们现在抽去所考察的量的物理意义, 来给出*函数*概念 (它是数学分析中的基本概念之一) 的准确而普遍的定义.

设给定具有变域 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 的两个变量 x 与 y. 假定按照问题的条件变量 x 可以不受任何限制地取得变域 $\mathscr{X}$ 中任意的值. *如果依照某一法则或规律, 对于 $\mathscr{X}$ 中每个值 x 相应地有 ($\mathscr{Y}$ 中) 一个确定的 y 值, 则变量 y 就叫做变量 x (在其变域 $\mathscr{X}$ 中) 的***函数**.

自变量 x 又叫做函数的变元.

在这定义中存在有两个要素: 第一, 指出变元 x 的变域 $\mathscr{X}$ (它又叫做函数的定义域); 第二, 确定 x 与 y 的数值之间的对应法则或规律 (函数 y 的变域 $\mathscr{Y}$ 通常是不指出的, 因为对应的规律本身就已确定函数值的集合).

在定义函数概念时可以从更普遍的观点出发, 就是假定对应于 $\mathscr{X}$ 中的 x 的每个值, y 的值不止一个, 而是几个 (甚至是无穷多个). 在这样的情形下我们称函数是多值的, 以区别于上面所定义的单值函数. 可是, 在分析教程中, 我们是从实变量的观点出发, 而避免讨论多值函数; 以后说到函数时, 如无特别的声明, 我们都理解为单值函数.

为了表明 y 是 x 的函数这一事实, 我们写成:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x), \quad \text{等等}^{①}.$$

字母 $f, \varphi, F, \cdots$ 就是表示这样的一种法则, 按此法则可由给定的 x 值得到对应的 y 值. 因此, 如果同时考察含同一个变元 x 但由不同的对应规律来联系的几个不同的函数, 那就不能用同一个字母表示出它们.

虽然字母 "f" (在各种文字中) 恰恰是与 "function (函数)" 这个字相联系的, 可是作为函数相依关系的记号, 自然也可用任何别的字母; 有时甚至就重复用同一个字母 y: 记 $y = y(x)$. 在某些情形中我们也把函数的变元写成函数的附标形状, 例如 y_x.

如果在考察函数譬如说 $y = f(x)$ 时, 我们希望注明与所选取的 x 的特定值 x_0 相对应的 y 的特定值, 那就用记号 $f(x_0)$ 来表示它. 例如, 若

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(t) = \frac{10}{t}, \quad h(u) = \sqrt{1-u^2},$$

则 $f(1)$ 就是函数 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时的数值, 简化后也就是数 $\frac{1}{2}$; 同样, $g(5)$ 就是数 2, $h\left(\frac{3}{5}\right)$ 就是数 $\frac{4}{5}$, 等等.

现在回转来讨论在变量的数值之间的对应法则或规律, 它就是函数相依关系这个概念的实质. 这种法则, 因为对它没有什么限制, 那就可以有着各种不同的特质.

利用公式来表现这种法则是最简单而且很自然的, 公式是以解析表达式的形式来表示函数的; 为了得到 y 的对应值, 在表达式里指出了施行于一些常数以及 x 的数值所必须进行的那些解析运算. 这种表示函数的解析方法在数学分析上是最重要的 (在下一段中我们还要讨论它). 读者最好在中学的数学教程中去熟悉它; 在介绍第 **16** 段中的几个例题时我们正应用了分析方法.

可是, 假若认为这是表示函数的唯一方法, 那就错了. 在数学中也常有不用公式来定义函数的情形. 例如, 有这样的函数 $E(x)$, 它表示 "数 x 的整数部分", ② 不难

①这种写法读作: "y 等于 fx", "y 等于 φx", 等等.

②或者更确切地说, 它是不超过 x 的最大整数 (E 是法文字 entier 的头一个字母, entier 表示 "整的" 意思).

理解

$$E(1)=1,\quad E(2.5)=2,\quad E(\sqrt{13})=3,\quad E(-\pi)=-4,\quad \text{等等},$$

然而我们并没有表达 $E(x)$ 的任何公式.

在自然科学与工程学中, 变量之间的相依关系往往是由实验或用观察方法建立起来的. 例如, 如果使水受任意选定的压力 p (大气压), 则由实验可以确定与它对应的沸点的温度 θ°C: θ 是 p 的函数. 可是这个函数相依关系不能用任何公式来表示, 而只能列出由实验所得的数值表来表示. 用列表法表示函数的例子, 在任何工程手册上都容易找到. 它的不方便的地方, 就是它只能给出对于变元的某些数值的函数值.

最后, 我们还要提到, 在某些情形下 —— 利用自动记录器 —— 物理量之间的函数相依关系是直接用图形表示的. 例如, 用指示器摄成的 "指示图表" 给出在工作着的蒸汽机的汽缸内气压 p 与体积 V 之间的相依关系; 由气压指示器所得到的 "气压图" 表示出大气压一昼夜的变化过程, 等等. 自然, 这种表示方法只能近似地确定函数的值.

关于确定函数相依关系的列表法或图示法, 我们不去详细谈它, 因为在数学分析中并不需要利用它们.

18. 函数的解析表示法 由于在数学分析中, 函数用*解析表达式*或*公式*的表示法起着极重要的作用, 因此我们要作出一系列的附注来说明它们.

1° 首先, 在这些公式中能够有怎样的*解析运算*? 在这里首先自然是有在初等代数及三角学中所研究过的一切运算: 四则运算、幂 (与开方)、取对数、由角度求其三角函数值以及其反运算 (参看后面 §2). 可是, 必须着重指出, 随着我们的分析知识的发展, 还需要加入其他的运算, 而首要的是第三章中要讲的极限步骤.

因此, 术语 "解析表达式" 或 "公式" 的完全内容只能逐渐地显露出来.

2° 次一附注是在说明用解析表达式或公式所表示的函数的*定义域*.

每一个包含变元 x 的解析表达式具有所谓*自然的*适用区域: 这是使解析表达式保持有意义的 (*也就是使它具有确定的有限实数值的*) 一切 x 值的集合. 我们用最简单的例题来说明它.

例如, 表达式 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的定义域是全体实数的集合.

表达式 $\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是*闭区间* $[-1,1]$, 在这范围以外它的值不再是实数. 相反地, 我们必须取*开区间* $(-1,1)$ 作为表达式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然的适用区域, 因为在两端点上它的分母等于零. 有时使表达式保持有意义的那种值的区域是由分散的区间所组成: 对于 $\sqrt{x^2-1}$ 来说, 有区间 $(-\infty,-1]$ 与 $[1,+\infty)$; 对于 $\dfrac{1}{x^2-1}$ 来说, 有区间 $(-\infty,-1),(-1,1)$ 与 $(1,+\infty)$; 等等①.

① 自然, 对于 x 的任何数值都没有意义的那种表达式, 我们是不感兴趣的.

在下面的叙述中需要考察更复杂更一般的解析表达式, 并且我们将时常研究由这类表达式在其保持有意义的全部区域内所确定的函数的性质, 也就是研究解析工具本身.

可是另一种可能的情况我们也认为必须预先提醒读者注意. 设想不论怎样的一个具体问题导致我们去考察一个具有解析表达式的函数 $f(x)$, 而在这个问题内变量 x 由于问题的本质被限制在变域 $\mathscr{X}$ 中. 虽然可能遇到这表达式在区域 $\mathscr{X}$ 以外也有意义的情形, 但要超出这范围来研究我们的具体问题却不可能. 在这里解析表达式只起着附属的辅助作用.

例如, 如果研究受重力作用的质点从地面上高 h 处自由下落时我们用公式

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

[**16**,2)], 则考察 t 的负值或大于 $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 的 t 值都是荒谬的, 因为很明显, 当 $t = T$ 时质点已落到地上. 然而表达式 $\frac{gt^2}{2}$ 本身却对于 t 的全部实数值都保持有意义.

3° 可能遇到这种情形, 对于变元的一切值函数不是由同一个公式确定, 而是对于变元的某些值函数由某一公式确定, 对于另一些值由另一公式确定. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内由下面三个公式来定义的函数就是这种函数的一个例子:

$$f(x) = 1, \text{ 当 } |x| > 1 \text{ 时 (即当 } x > 1 \text{ 或 } x < -1 \text{ 时)},$$
$$f(x) = -1, \text{ 当 } |x| < 1 \text{ 时 (即当 } -1 < x < 1 \text{ 时)},$$

而且最后

$$f(x) = 0, \quad \text{当 } x = \pm 1 \text{ 时}.$$

可是, 不要以为对于 x 的全部值由一个公式定义的函数与利用几个公式定义的函数, 两者之间有着原则上的区别. 通常由几个公式给定的函数也可由一个公式来给定 (当然, 要用一复杂的表达式). 特别是, 对于上面引入的函数, 这是正确的 [参看第 **43** 段, 5)]. 以后我们会时常遇到这一类的例子.

19. 函数的图形 虽然在数学分析中并不用图形给出函数, 可是我们经常使用函数的图解, 图形具有直观性与明显性这个特点使它成为研究函数的性质时不可缺少的辅助工具.

设在某一区间 $\mathscr{X}$ 内给定了函数 $y = f(x)$. 我们设想在平面上有两条互相垂直的坐标轴 —— x 轴与 y 轴. 考察相对应的一对 x 与 y 的值, 其中 x 取自区间 $\mathscr{X}$, 而 $y = f(x)$; 这一对值在平面上的形象就是具有横坐标 x 与纵坐标 y 的点 $M(x, y)$. 当 x 在其区间范围内变化时所得到的这种点的全体, 就是*函数的图形*, 也就是它的几何形象. 平常的图形是像图 2 中曲线 AB 的一条曲线, 在这些条件下方程 $y = f(x)$ 本身叫做*曲线 AB 的方程*.

例如, 在图 3 与图 4 中画出了函数

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\leqslant 1)\quad 与$$
$$y=\pm\sqrt{x^2-1}\quad(|x|\geqslant 1)$$

的图形; 读者能认出它们是圆周与等轴双曲线. 在下面几段中读者可看到其他许多函数的图解法的例子.

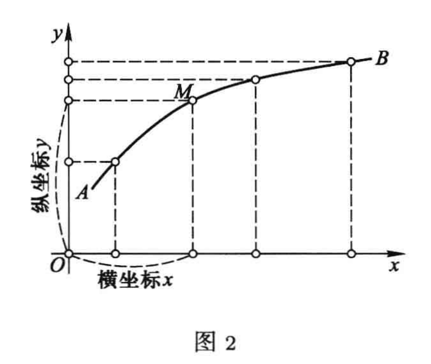


图 2

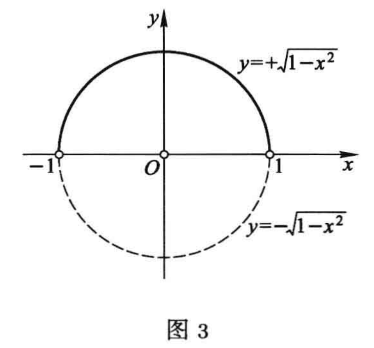


图 3

图形通常是逐点地描出的. 在区间 $\mathscr{X}$ 中取一系列互相邻近的 x 的值, 按公式 $y=f(x)$ 标出 y 的各个对应值:

$$\frac{x=x_1|x_2|\cdots|x_n}{y=y_1|y_2|\cdots|y_n}$$

并且在图上描出这些点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n).$$

通过这些点用手或用曲线板作出曲线, 它就是所求的图形 (自然, 这只是近似的图形). 图形的进程愈平顺并且所取的点愈稠密, 则描出的曲线就愈准确地代表这图形.

必须注意, 虽然函数的几何图形总能 "表示" 函数本身, 可是这个图形并不总是在直观意义下的曲线.

例如, 我们来作函数 $y=E(x)$ 的图形. 因为在区间 $\cdots,[-2,-1),[-1,0),[0,1),[1,2),[2,3),\cdots$ 内函数保持常数值 $\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$, 所以它的图形是由一系列单个的水平线段所组成, 而且各线段都缺少右边的端点 (图 5).①

20. 以自然数为变元的函数　直到现在为止, 我们只考察了一些变元连续变化的函数的例子, 变元的数值填满了整个的区间. 我们现在要讲到在根本上较简单的 (但并非不重要的) 变元 n 的函数 $f(n)$ 的情形, 变元 n 只取 $\mathbb{N}$ 中一系列自然数值. 这种以自然数为变元的函数以后将起着特别的作用.

①这种情况可用一些箭头来表明, 箭头的尖端指出不属于图形的各点.

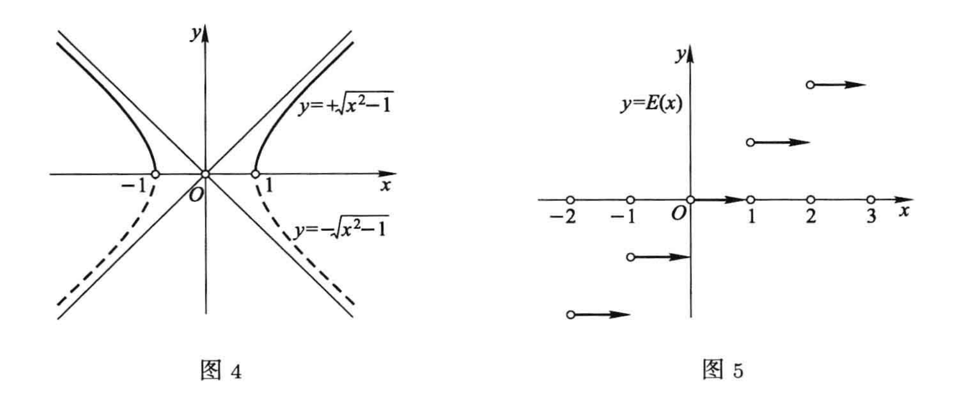


图 4　　　　图 5

对于这种函数我们往往不用通常的函数记号, 并且写成任何一个具有下标 n 的字母, 例如 x_n, 以代替着 $f(n)$. 如果用具体的自然数, 例如 1, 23, 518, $\cdots$ 来代替这个下标 (在这里我们理解它是自变量), 则 $x_1, x_{23}, x_{518}, \cdots$ 就是函数 x_n 的对应数值, 好似 $f(1), f(23), f(518), \cdots$ 就是函数 $f(n)$ 的数值一样.

根据一般的定义, 函数 x_n 认为是已知的, 只要我们有一个法则, 使得它的**任何**值在 n 的值一指出时就能够计算出来.

通常的情形是这样, 即函数 x_n 是由一个公式给出, 这公式建立了在自然数变元 n 上 (与在常数上) 所必须进行的那些用来求出函数的对应值的解析运算.

例如:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}, \quad a_n = q^n, \quad y_n = \lg n, \quad \text{等等.}$$

可是, 在现在所考虑的情形下, 函数当然也可用任何其他的法则给定. 例如, "数 n 的阶乘":

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot n,$$

以及表示 n 的因子个数的函数 $\tau(n)$, 或者表示在 $1, 2, 3, \cdots, n$ 内所有与 n 互素的数字个数的函数 $\varphi(n)$. 不管给定这些函数的法则的特性如何, 它们也和公式一样确切地使得能够算出函数的确定数值:

$$\tau(10) = 4, \quad \tau(12) = 6, \quad \tau(16) = 5, \cdots$$
$$\varphi(10) = 4, \quad \varphi(12) = 4, \quad \varphi(16) = 8, \cdots$$

再一例子: 我们取

$$1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \cdots$$

作为 $\sqrt{2}$ 的十进小数近似值 (指不足近似值), 这些近似值具有愈来愈高的准确度. 知道了根的近似计算法, 我们虽然没有这近似值的一般表达式, 但是我们也可以计算这一个完全确定了的函数, 它等于所说的根数的近似值, 达到 $\frac{1}{10^n}$ 的准确度.

在中学的数学教程中读者不止一次遇见过具有自然数附标的函数. 如果给定了无穷的几何序列

$$\div\div\ a, aq, aq^2, \cdots,$$

则这序列的通项是附标 n 的函数

$$a_n = aq^{n-1}$$

并且序列的 n 项之和是

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

在定义圆周的长度与圆的面积时, 通常考察内接于圆周的正多边形, 从内接正六边形起将边数逐次加倍, 则得到一系列的内接正多边形. 如果将这种正多边形的边数逐次加倍到第 n 次 (n 是任意的), 则这种多边形的边, 它的边心距、周长与面积全都是自然附标数 n 的函数.

21. 历史的附注 “函数” 这一术语本身早在 1692 年就已出现于莱布尼茨的一著作中①, 其后被雅各布 · 伯努利与约翰 · 伯努利两兄弟②在论及与一曲线的点有联系的各种线段的性质时应用到了. 1718 年约翰 · 伯努利首次给出了不受几何意义约束的函数的定义. 他的学生欧拉③所著的《无穷小量分析引论》(1748 年) 教科书, 为整个一辈数学家所学习; 在这书中转述了伯努利的定义, 并把它写得更精确一些:

“变量的函数是由这个变量与一些数目或者一些常数用任何方式组成的解析表达式.” ④

由此可见, 在这个定义中函数可以任意地与产生它的解析表达式等同起来.

除了 “显” 函数以外, 欧拉还考虑了由未求出解的方程所定义的 “隐” 函数. 同时 —— 由于著名的弦的振动问题 (在第二卷中将详细地叙述它) —— 欧拉认为在分析上能容许的, 不仅是在区间的不同的部分内由不同的解析表达式所给出的 “混合的” 函数 [参考第 **18** 段, 3°], 甚至是由任意画出的图形所确定的函数. 在他的《微分学》(1755 年) 序言中我们还可见到更一般的虽然也不够确切的定义:

“如果某些变量以这样一种方式依赖于另一些变量, 即当后面这些变量变化时前面那些变量也经历变化, 则前面那些变量叫做后面这些变量的函数.” ⑤

在几十年的期间内函数概念这个定义都没有得到本质上的发展. 把对应的观念唯一地作为这个概念的基础并列为首要地位这一件事, 通常归功于狄利克雷⑥.

1837 年狄利克雷对于变量 x 的函数 y 给出了这样一个定义 (假定 x 取某一区间内的全部数值):

---

①莱布尼茨 (1646—1716) 是德国著名的哲学家兼数学家. 他与牛顿同有创立微积分学的功绩 (参看第十四章中历史概述).

②雅各布 · 伯努利 (1654—1705) 与约翰 · 伯努利 (1667—1748) 出身于数学史上著名的荷兰家庭; 两人都继承了莱布尼茨的数学, 并 (特别是约翰 · 伯努利) 对微积分学的传播功绩很大.

③欧拉 (1707—1783) 是杰出的数学家; 出生在瑞士, 他在俄国度过了其大部分活动的年代, 是彼得堡科学院的院士.

④所提的著作 (原本是用拉丁文写的) 第一卷有俄文译本 (1936 年), 参考第 30 页.

⑤参考俄文译本 “微分学” (1949 年), 第 38 页.

⑥狄利克雷 (1805—1859) 是德国著名的数学家.

"如果对应于每一个 x 有唯一的有限的 $y\cdots\cdots$, 则 y 叫做 $\cdots\cdots$ 在这区间内的 x 的函数. 这时并无必要限定 y 在这整个区间内按照同一个规律依赖于 x, 甚至不必是用数学运算来表达其依赖关系".

这个定义 (虽然由于作者的用语而略减其一般性) 在数学分析上起了重要的作用.

罗巴切夫斯基①叙述过这个观念不仅比较早, 而且是以无错误的形式来叙述的, 然而这事很久没引起注意. 罗氏的观点起初与欧拉的相接近, 以后逐渐地脱离了它, 罗氏在其著作 "Об исчезании тригонометрическихстрок" (1834 年) 中已肯定地说:

"要称一数为 x 的函数, 其一般的概念要求对于每一个 x 这个数是确定的, 并且它是与 x 一起逐渐变化着的. 函数的值可以由解析表达式给定, 或者由条件给定 (这个条件提供一种手段来从全部的数中选取其中一数); 甚或函数依赖关系可以存在但依然是未知的"②.

最后我们指出, 习惯上用的函数记号 $f(z)$ 是欧拉的记号.

§2. 几类最重要的函数

22. 初等函数 在这里我们要列举几类所谓的*初等函数*.

1° *有理整函数与有理分式函数* 由 x 的多项式

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$(a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是常数) 所表示的函数, 叫做*有理整函数*.

两个这样的多项式之比

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

是*有理分式函数*. 它对于 x 的一切值除了使分母为零那些值以外都是确定的.

例如, 在图 6 中给出了函数 $y = ax^2$ 在系数 a 为各种不同数值时的图形 (*抛物线*), 而在图 7 中给出了函数 $y = \dfrac{a}{x}$ 对于各种不同的 a 值的图形 (*等轴双曲线*).

2° *幂函数* 所谓幂函数就是

$$y = x^{\mu},$$

其中 μ 是任意的实常数. 当 μ 为整数时得到有理函数. 当 μ 为分数时得到*根式*. 例如, 设 m 是自然数, 并且

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}.$$

这函数对于 x 的一切值只要 m 是奇数就都是有定义的, 而当 m 是偶数时则只有对于 x 的正值与零值才有意义 (在这情形下我们只考虑根的算术值). 最后, 如果 μ 是无理数, 我们就预设 $x > 0$ (只在 $\mu > 0$ 时才许 $x = 0$).

在图 8 与图 9 中给出了幂函数在各种不同的 μ 值时的图形.

---

①罗巴切夫斯基 (1793—1856) 是俄国的大数学家, 因创立非欧几何学而著名.

②罗巴切夫斯基的全集, 第五卷 (1951 年), (俄文版) 第 43 页.

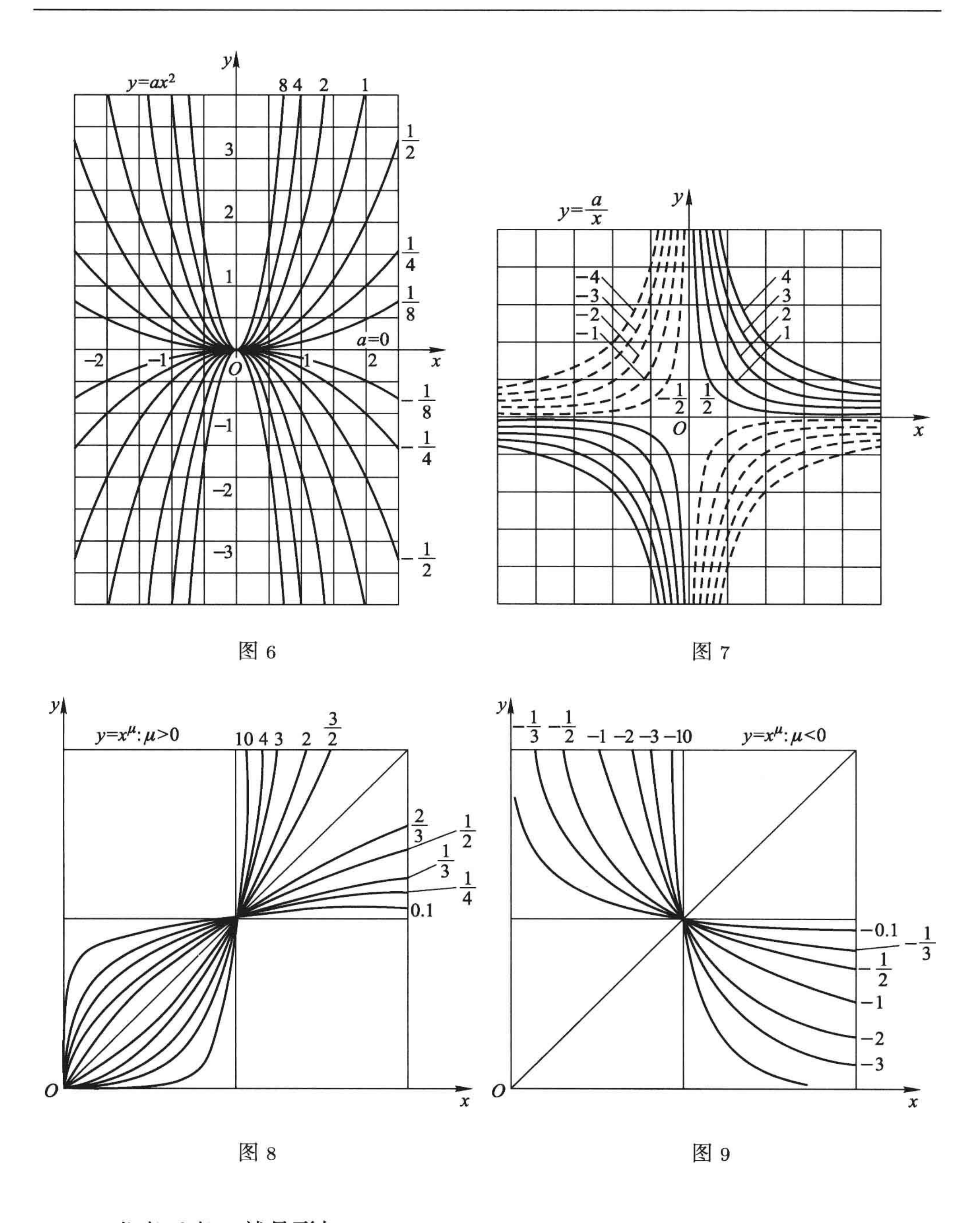


图 6

图 7

图 8

图 9

3° 指数函数　就是形如

$$y = a^x$$

的函数, 其中 a 是异于 1 的正数; x 可取任何实数值.

在图 10 中给出了指数函数在各种不同的 a 值时的图形.

4° 对数函数　就是形如

$$y = \log_a x^{①}$$

的函数, 其中 a 和前面一样是正数 (异于 1); x 只能取正数值.

在图 11 中给出了这个函数在各种不同的 a 值下的图形.

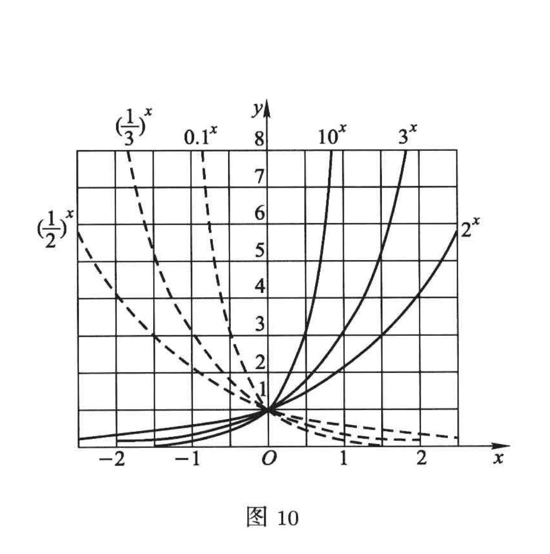


图 10

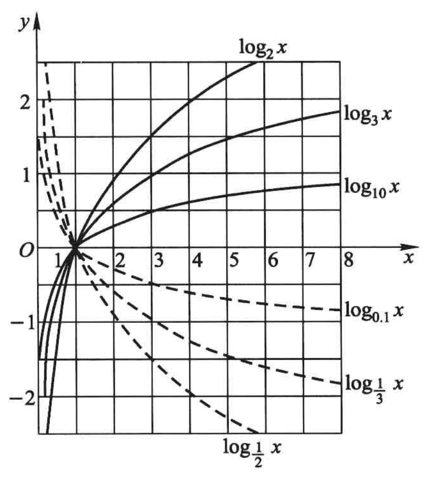


图 11

5° 三角函数:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x,$$

$$y = \sec x, \quad y = \csc x.$$

最重要的是要永远记住, 三角函数的变元如果作为角度看待时总是表示角的弧度 (假如没有相反的声明). 对于 $\tan x$ 与 $\sec x$ 需要除掉形如 $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 的值, 而对于 $\cot x$ 与 $\csc x$ 需要除掉形如 $k\pi$ 的值 (k 是整数).

在图 12 与图 13 中给出了函数 $y = \sin x(\cos x)$ 与 $y = \tan x(\cot x)$ 的图形. 正弦的图形通常叫做正弦曲线.

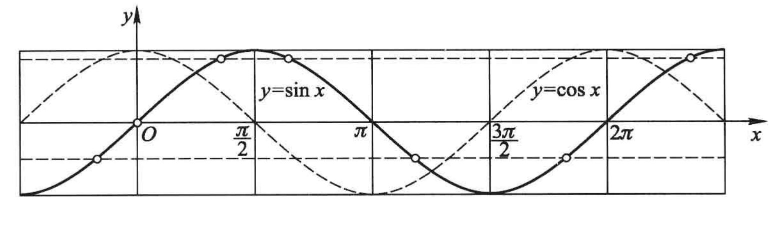


图 12

①我们用 $\log x$ 作为十进对数 (常用对数) 的记号: $\log x = \log_{10} x$.

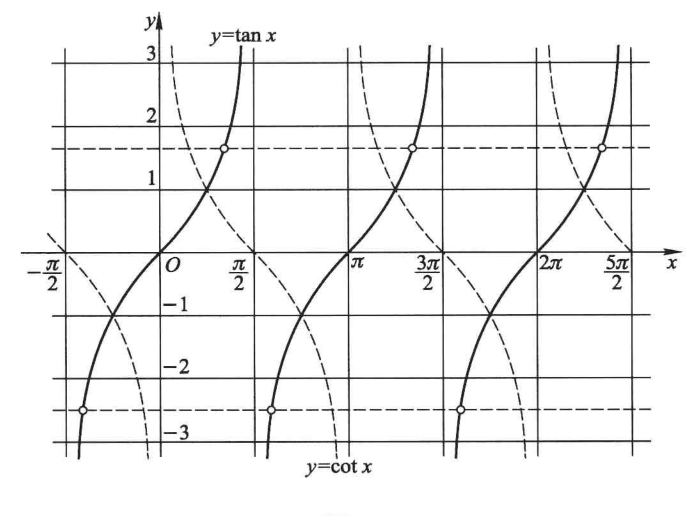


图 13

23. 反函数的概念 在讨论反三角函数以前，我们先对反函数作一般的说明.

假定在某一区域 $\mathscr{X}$ 内给定了函数 $y = f(x)$，并设 $\mathscr{Y}$ 是这个函数当 x 在区域 $\mathscr{X}$ 的范围内变化时所取的一切值的集合. 在实用上 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 通常都是区间.

在区域 $\mathscr{Y}$ 内选取任一数值 $y = y_0$；于是在区域 $\mathscr{X}$ 内一定能求得这样一个数值 $x = x_0$，使我们的函数恰好就在 x_0 处取得 y_0 值，即

$$f(x_0) = y_0;$$

这样的数值 x_0 可能出现好几个. 因此，对应于 $\mathscr{Y}$ 中每一个数值 y 可有一个或多个 x 的数值；这样就在区域 $\mathscr{Y}$ 内对应地确定出单值的或多值的函数 $x = g(y)$，它就叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数.

考察几个例子.

1. 设 $y = a^x (a > 1)$，其中 x 在区间 $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$ 内变化. y 的数值布满了区间 $\mathscr{Y} = (0, +\infty)$，并且对应于这区间内的每一个 y，如我们所知 [第 **12** 段]，在 $\mathscr{X}$ 内有一个确定的 $x = \log_a y$. 在这情形下反函数是单值的.

2. 反之，对于函数 $y = x^2$，如果 x 在区间 $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$ 内变化，则反函数是双值的：对应于区间 $\mathscr{Y} = [0, +\infty)$ 内每一个数值 y 有着 $\mathscr{X}$ 内的两个数值 $x = \pm\sqrt{y}$. 代替这种双值函数我们通常分别地考察两个单值函数 $x = +\sqrt{y}$ 与 $x = -\sqrt{y}$ (双值函数的两 "分支"). 它们也可以分别算作函数 $y = x^2$ 的反函数，只要假定 x 的变域是分别由区间 $[0, +\infty)$ 与 $(-\infty, 0]$ 限制的.

我们注意，按照函数 $y = f(x)$ 的图形，容易判断它的反函数 $x = g(y)$ 是单值的或者不是单值的. 如果任一条平行于 x 轴的直线只与这函数的图相交于一点，则出现第一种情形. 反之，如果这样的直线中有若干条与图形相交于多个点，则反函数就

是多值的. 在这种情形下按照图形也容易把 x 的变化区间分成几个部分, 使得每一部分都与这函数的单值 "分支" 相对应. 例如, 只要一看图 14 中的抛物线 (它是函数 $y=x^2$ 的图形), 显然知道这函数的反函数是双值的, 并且要得到单值的 "分支" 只要分别地考虑这抛物线的左边部分与右边部分, 也就是分别地考虑 x 的正值与负值.①

若 $x=g(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数, 则两函数的图形显然重合. 但是, 可以要求反函数的变元也用字母 x 来表示, 就是说, 代替函数 $x=g(y)$ 我们来考察函数 $y=g(x)$. 这时只要称水平轴为 y 轴, 而称铅垂轴为 x 轴; 图形还保留以前的. 如果希望 (新的) x 轴也和习惯上一样是水平的, 而 (新的) y 轴是铅垂的, 那就需要把这两轴交换位置, 这也就会改变原来图形. 要做到这一点, 最简单的办法是把图中的平面 xOy 绕第一象限角的角平分线旋转 180° (图 15).

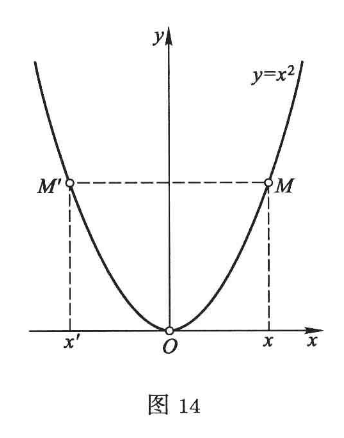


图 14

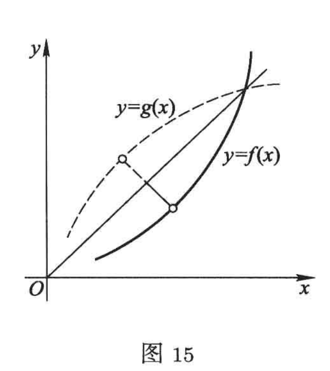


图 15

于是, $y=g(x)$ 的图形就可视为 $y=f(x)$ 的图形关于这角平分线的镜面反射而得到. 例如, 由图 10 与图 11 立即看出, 它们就是用这种方法可以互相得到的图形. 同样, 根据上述理由, 不难解释清楚在图 8 与图 9 中每一图形 (关于角平分线) 的对称性.

24. 反三角函数 作为第 **22** 段中已叙述过的初等函数类的补充, 我们现在来考虑

6° *反三角函数*:

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\arctan x,$$
$$y=\operatorname{arccot} x\quad (y=\operatorname{arcsec} x,\quad y=\operatorname{arccsc} x).$$

首先来讲其中第一个. 函数 $y=\sin x$ 在区间 $\mathscr{X}=(-\infty,+\infty)$ 内是确定的, 并且它的数值布满了区间 $\mathscr{Y}=[-1,1]$ 的全部. 平行于 x 轴的直线如与正弦曲线 —— 即函数 $y=\sin x$ 的图形 (图 12) —— 相交, 其交点就有*无限多个*; 换句话说, 与区间

① 在后面第 **71** 段中我们还要讨论反函数的存在性与单值性的问题.

$[-1,1]$ 中每一个 y 值相对应, 有着无限多个 x 的值. 所以反函数, 记为

$$y = \operatorname{Arcsin} y^{①},$$

是 (无穷) 多值的.

通常只考虑这函数对应于 x 在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间变化的那一 "分支". 与 $[-1,1]$ 中的每个 y 对应的只有这范围中的一个 x 值; 用记号

$$x = \arcsin y$$

表示它并称它为*反正弦函数的主值*.

把正弦曲线绕第一象限角的角平分线翻转来 (图 16), 我们得到*多值函数* $y = \operatorname{Arcsin} x$ 的图形; 其*主支* $y = \arcsin x$ 是用粗线标出的, 主支在 x 值的区间 $[-1,1]$ 内是单值地确定的并且满足不等式

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

这不等式表达出主支在其他各分支中间的特征.

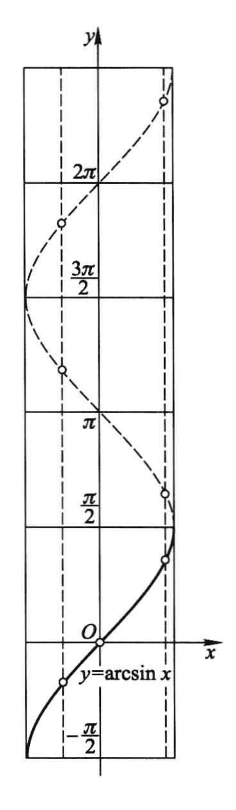


图 16

回忆在初等三角学中, 如何把具有已知正弦的角的全部数值用其中一个数值表达出来, 就不难把给出反正弦函数全部数值的公式写出如下:

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi$$

或者

$$(2k+1)\pi - \arcsin x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

类似的讨论也可应用于函数 $y = \cos x (-\infty < x < +\infty)$. 在这里反函数

$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

是 (无穷) 多值的 (参看图 12). 要分出它的单值的分支, 可给它一个条件

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

这是*反余弦函数的主支*.

函数 $\arccos x$ 与 $\arcsin x$ 间有明显的关系式:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

事实上, 不仅是角 $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$ 的余弦等于 $\sin(\arcsin x) = x$, 而且这角的本身也

① 我们在当初 [第 **22** 段, 5°] 已着重指出, 三角函数的变元 x 表示角的*弧度*; 自然, 在这里反三角函数的值 —— 如果把它们当作角的测度 —— 也都是用弧度表示的.

包含在 0 与 π 之间. $\operatorname{Arccos} x$ 的其余诸值可由其主值借公式

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

表达出来.

函数 $y = \tan x$ 对于 x 的全部数值, 除了

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

诸数值以外都是确定的. 在这里 y 的数值布满了区间 $(-\infty, +\infty)$, 并且对应于每一个 y 仍有无限多个 x 的值 (参看图 13). 所以给定在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的反函数 $x = \operatorname{Arctan} y$ 是 (无穷) 多值的. 在图 17 上画出了函数 $y = \operatorname{Arctan} x$ 的图形, 它是把函数 $y = \tan x$ 的图形绕第一象限角的平分线旋转 180° 而得到的. 我们取这多值函数满足不等式

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

的数值作为*反正切函数* $\arctan x$ *的主值*.

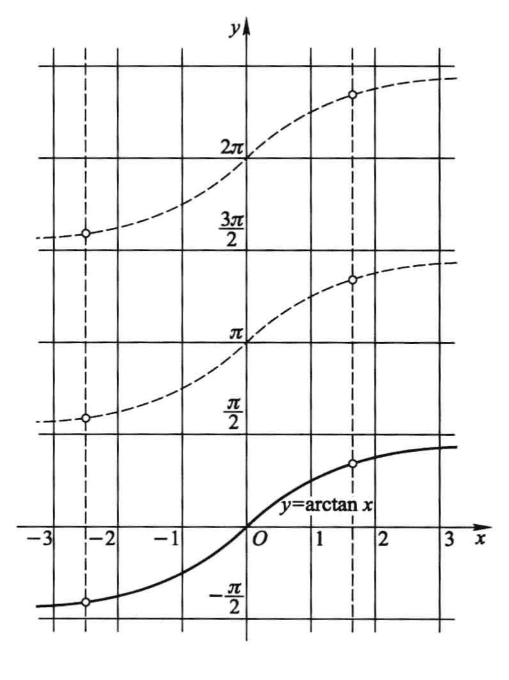


图 17

于是单值函数 —— *反正切函数的主支*对于 x 的一切值都是确定的. 容易证明反正切函数的其余诸值可由下面公式求得:

$$\operatorname{Arctan} x = \arctan x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

不难在函数 $\arctan x$ 与 $\arcsin x$ 之间建立直接的联系:

$$\underset{(-\infty<x<+\infty)}{\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \quad 或 \quad \underset{(-1<x<+1)}{\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

例如, 若令 $\alpha = \arctan x$, 因而 $\tan\alpha = x$, 则 $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 并且因为 $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 根式前应取正号; 由此推得

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

我们再讲到函数 $\operatorname{Arccot} x(-\infty < x < +\infty)$; 它的主值由不等式

$$0 < \operatorname{arccot} x < \pi$$

确定, 并且与 $\arctan x$ 有如下的关系:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

反余切函数的其余的数值可表示成下面形式:

$$\operatorname{Arccot} x = \operatorname{arccot} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

我们不再讲函数 $\operatorname{arcsec} x(-\infty < x \leqslant -1$ 及 $1 \leqslant x < +\infty)$ 以及 $\operatorname{arccsc} x$ (同是那两个变化区间), 让读者自己去研究它们.

25. 函数的叠置 · 结束语 我们来介绍函数的叠置这个概念, 那就是要用 (另一个变元的) 另一个函数来代替已知函数的变元. 例如, 函数 $y = \sin x$ 与 $z = \log y$ 的叠置给出函数 $z = \log\sin x$; 同样又能得到函数

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \arctan\frac{1}{x}, \quad 等等.$$

一般情形, 假定函数 $z = \varphi(y)$ 在某一区域 $\mathscr{Y} = \{y\}$ 中是确定的, 而函数 $y = f(x)$ 对于区域 $\mathscr{X} = \{x\}$ 中的 x 是确定的, 并且它的全部值包含在区域 $\mathscr{Y}$ 中. 于是我们说, 变量 z 通过 y 而成为 x 的函数:

$$z = \varphi(f(x)).$$

依照 $\mathscr{X}$ 内给定的 x 首先 (按照记号 f 所表征的法则) 求出 $\mathscr{Y}$ 内对应于它的 y 值, 然后再 (按照记号 φ 所表征的法则) 确定对应于这个 y 值的 z 值; 它就是与所选的 x 值对应的 z 值. 所得的函数的函数或复合函数就是函数 $f(x)$ 与 $\varphi(y)$ 叠置的结果.

函数 $f(x)$ 的值不超出函数 $\varphi(y)$ 的定义域 $\mathscr{Y}$ 的范围这一假设, 是极为重要的: 如果没有这假设, 就会得出谬论. 例如, 令 $z = \log y$, 而 $y = \sin x$, 我们就只能考察使 $\sin x > 0$ 的那种 x 的值, 否则表达式 $\log\sin x$ 就会没有意义.

我们认为在这里着重指出下面一事是有益处的：作为复合函数看待的函数，它的特征与 z 依赖于 x 这一函数关系的本身没有联系，而只与这个关系的表示方法有联系. 例如，设 $z=\sqrt{1-y^2}$ 当 y 在 $[-1,1]$ 内，而 $y=\sin x$ 当 x 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内，于是

$$z=\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x.$$

在这里函数 $\cos x$ 是按复合函数的形式出现的.

完全弄清楚了函数的叠置概念以后，我们现在可确切地说明在分析上所研究的那些函数中最简单的几类：首先就是前面所列举的初等函数 1°—6°，其次是由这些函数利用算术四则运算与运用有限多次叠置方法所得到的函数. 我们称这种函数是*有限形式的初等函数*；有时也同样地称它们为*初等函数*.

以后，掌握了更复杂的解析工具 (无穷级数、积分) 时，我们还要介绍在分析上同样起重要作用的其他一些函数，不过它们已超出了初等函数的范围.

第三章　极限论

§1. 函数的极限

26. 历史的说明　极限这个概念现在贯穿着整个的数学分析, 并且在数学的其他领域中也起着重要的作用. 可是这个概念 (读者将在第十四章中看到) 却不是在微积分学产生时就已成为微积分学的基础的. 极限概念的定义首次出现于沃利斯[①]的《无穷量的算术》中 (1655). 实际上这个定义和后面第 **28** 段中叙述的定义是一样的形式. 牛顿在著名的《自然哲学的数学原理》(1686—1687) 中发表了其最初比与最后比 (或和数) 的方法, 其中可看到极限理论的萌芽. 可是在 18 世纪的大数学家中谁都没有想到用极限概念来论证新的计算方法以及用极限概念来回答新计算法所受到的正确批评[②]. 就这一点来说, 欧拉的论点是特殊的, 他在《微分学》(1755) 这本书的序言中明白地说到了极限, 可是在全书中没有一处用过这个概念!

柯西[③]的《代数分析》(1821) 以及他后来的诸著作是上述问题的转折点, 在这些著作中极限理论首次有了发展, 并成了柯西严格地构成整个数学分析的有力工具. 柯西的论点企图扫除在他以前掩盖分析学原理的神秘障碍, 他的论点得到了普遍的承认.

可是, 其他的学者也应分享柯西的功绩, 特别是波尔查诺, 波氏在许多方面的工作不仅超在柯西之前, 而且也超在后来诸数学家之前. 这些工作没有得到传播, 而且只在几十年以后才被提起.

27. 数列　我们从最简单的特殊的 (甚至是在中学教程中已知道的) 情形开始, 也就是从以自然数为变元的函数 x_n 的极限开始, 来建立分析学中的极限基本概念. 我们将知道, 更加复杂的情形原则上可化为这种情形.

设变元 n 取自然数的序列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots, n', \cdots \tag{1}$$

[①] 沃利斯 (J. Wallis) (1616—1703) 是英国的数学家.

[②] 关于这一点的详细情形可参考第十四章.

[③] 柯西 (A. L. Cauchy) (1789—1857) 是法国著名的分析学家.

中全部数值, 我们假定这序列的项是依由小到大的顺序排列的, 较大的数 n' 在较小的数 n 的后面, 较小的数 n 在较大的数 n' 的前面.

如果给定了函数 x_n, 则它的变元或者附标 n 可以当作变量的对应值的序号. 于是 x_1 是它的第一个值, x_2 是第二个值, x_3 是第三个值, 等等. 我们以后总假定这些数值的集合 $\{x_n\}$ 像自然数的序列 (1) 一样是按序号增大的顺序排列的, 也就是按数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots, x_{n'}, \cdots \tag{2}$$

的形式排列的①. 当 $n' > n$ 时, 数值 $x_{n'}$ 在 x_n 的后面 (x_n 在 $x_{n'}$ 的前面) 而不论数值 $x_{n'}$ 本身大于、小于或者等于 x_n.

例如, 若由下列公式之一来给定函数 x_n:

$$x_n = 1, \quad x_n = (-1)^{n+1}, \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n},$$

则对应的数列为:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{1}{1}, & \underset{2}{1}, & \underset{3}{1}, & \underset{4}{1}, & \underset{5}{1}, & \underset{6}{1}, & \cdots \\
\underset{1}{1}, & \underset{2}{-1}, & \underset{3}{1}, & \underset{4}{-1}, & \underset{5}{1}, & \underset{6}{-1}, & \cdots \\
\underset{1}{0}, & \underset{2}{1}, & \underset{3}{0}, & \underset{4}{\frac{1}{2}}, & \underset{5}{0}, & \underset{6}{\frac{1}{3}}, & \cdots
\end{array}$$

在第一种情形下我们只得到常量: 它所取的数值的 "集合" 只含一个元素 1, 在第二种情形下这个集合是由 x_n 交错取得的两个数值 1 与 –1 所组成. 最后, 在第三种情形下函数 x_n 所取得的各种数值组成一无穷集合, 但这并不妨碍这个函数每隔一次取一个等于零的数值. 因此, 作为变量来看, 函数 x_n 的变域 $\mathscr{X}$ 与序列 (2) 本质上是彼此不同的. 第一个不同地方是: 在集合 $\mathscr{X}$ 中每一个元素出现一次, 而在序列 (2) 中同一个元素可重复几次 (甚至无穷多次). 第二个不同地方 —— 也是本质上不同的地方 —— 在于: 集合 $\mathscr{X}$ 是 "无定形的", 没有次序, 而对于序列 (2) 中的元素来说, 则规定了一定的次序.

记载序列的惯用方法 [参看 (2)] 好像预定了序列中元素的空间的位置. 可是这种记载法只是为了便利, 而与问题的本质无关. 如果我们说, 变量 "经过" 这样的一数值的序列, 则读者可能会产生变量在相继各时刻经过其数值的时间观念, 可是事实上这却与时间完全无关. 不过为了借喻说话方便, 我们有时也用如下的一些说法: 变量的 "很远的" 数值, 变化从某一 "位置" 或某一 "时刻" 开始, 等等.

28. 序列的极限定义 将变量 x_n 的数值依其序号增大的次序排列, 导致对这些数值的序列 (2) 的考察, 这也就使得我们易于理解, 当 n 无限地增加时变量 x_n 逼近于极限 a 的 "过程".

①同样地可以说到直线上的点序列或任何记有自然数附标的其他对象的序列.

如果 x_n 的数值从某一位置开始 (也就是对于一切足够大的序号 n) 可以与常数 a 相差任意小, 则常数 a 叫做**变量** x_n **的极限**.

极限的本质已由此鲜明地表达出来, 可是什么是 "任意小" 与什么是 "足够大", 还需要明确说明:

若对于每一个正数 ε, 不论它怎样小, 恒存在这样一个序号 N, 使得当 $n > N$ 时, 一切 x_n 的数值都满足不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{3}$$

则数 a 叫做**变量** x_n **的极限**. a 是变量 x_n 的极限这个事实, 记成:

$$\lim x_n = a$$

(lim 是拉丁字 limes 的简写, 就是 "极限" 的意思). 我们也说, 变量趋向于 a, 并写成

$$x_n \to a.$$

最后, 数 a 也叫做**序列** (2) **的极限**, 并称这序列收敛于 a.

不等式 (3), 其中 ε 是任意的, 就是可使 x_n 与 a"相差任意小" 这一断语的确切记法, 而序号 N 恰好就指出这个 "位置", 从它开始不等式 (3) 成立, 于是所有 $n > N$ 的序号 n 就都是 "足够大" 的了.

重要的是要理解: 序号 N 一般说来不能一次指定就永不变化; 它依赖于所选取的数 ε. 为要着重指出这一点, 我们有时写 N_ε 以代替 N. 当 ε 减小时, 对应的序号 $N = N_\varepsilon$ 一般说来就要增大: 要想变量 x_n 的数值与 a 接近的程度愈大, 就必须在序列 (2) 中考虑它的 "愈远的" 数值.

例外的一种情形, 是变量 x_n 的全部 数值都等于常数 a. 显然, 这时 $a = \lim x_n$, 可是这时对于任何的 $\varepsilon > 0$ 以及 x_n 的一切数值, 不等式 (3) 同时能够成立①.

我们已知道 [第 **8** 段], 不等式 (3) 与下面等价:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

或者

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \tag{4}$$

这是我们以后常要用到的不等式.

以 a 点为中心的开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 叫做这点的邻域. 因此, 不论 a 点的邻域取得怎样小, x_n 的**全部**数值从其中某一个起应该落在这邻域内 (因而在这邻域外只能有有限多个这种数值). 如果把数 a 与变量 x_n 的各个数值用数轴上的点表示 [第 **13** 段] (图 18), 则表示数 a 的点好似表示 x_n 的数值的点的凝集中心.

---

①对于其数值从某一位置起都等于 a 的那种变量 x_n, 有与此类似的情况.

图 18

29. 无穷小量 当变量趋向于零时: $x_n \to 0$ 的这种情形, 是值得特别注意的.

以零为极限的变量 x_n 叫做无穷小量, 或简称*无穷小*.

如果在变量 x_n 的极限定义 [第 **28** 段] 中令 $a=0$, 则不等式 (3) 成下面的形状:

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (\text{当 } n > N_\varepsilon).$$

因此, 上面给出的无穷小的定义可以不用术语 "极限" 而更详细地叙述如下:

*若对于足够大的序号, 变量 x_n 的绝对值可变得小于并保持小于预给的任意小数 $\varepsilon > 0$, 则它叫做***无穷小**.

(在历史上形成起来的) 不十分恰当的术语 "无穷小" 量, 希望不要引起读者的误解: 这个量所取的任何一个个别的数值, 只要它不是零, 就不能断定是 "很小的". 问题的实质在于, *无穷小量是变量*[①], *它仅在自己的变化过程中*最后能够变到小于任意选取的数 ε.

如果回到以 a 为极限的变量 x_n 的一般情形, 则变量与其极限的差

$$\alpha_n = x_n - a$$

显然是无穷小: 因为由 (3), 有

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{当 } n > N_\varepsilon).$$

反之, 如果 α_n 是无穷小, 则 $x_n \to a$. 这就使我们推得下面的结论:

*变量 x_n 以常数 a 为其极限的***必要且充分***条件, 是它们的差数 $\alpha_n = x_n - a$ 为无穷小量.*

因此, 关于 "极限" 概念也可以给出另一个 (与旧定义等价的) 定义:

*常数 a 叫做变量 x_n 的***极限***, 只要它们的差是无穷小量.*

自然, 如果从这个极限的定义出发, 则对于无穷小量就必须应用上面引进的第二个定义. 否则便会得到循环推理: 极限由无穷小量来定义, 而无穷小量又由极限来定义!

因此, 若变量 $x_n \to a$, 则它可以表成

$$x_n = a + \alpha_n,$$

其中 α_n 是无穷小量. 反之, 若变量具有这种表示式, 则它就有极限 a. 在实用上常利用这个式子来确定变量的极限.

---

①除掉当它恒等于零的那种无趣的情形.

30. 例 1) 考察变量

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

与它们相对应的数列是:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \cdots,$$

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \cdots,$$

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \cdots.$$

这三个变量都是无穷小量, 就是都以零为其极限. 实际上, 要想对于这三个变量有

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

就只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 因此, 我们可以取比 $\frac{1}{\varepsilon}$ 小的最大整数, 即 $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$①当作 N_ε.

我们注意, 第一个变量总大于它的极限零; 第二个总小于零; 第三个则轮流地时而大于零, 时而小于零.

2) 若令

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n},$$

则变量遍历这样的一列数值:

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{6}, \cdots.$$

在这情形下也有 $x_n \to 0$, 因为当 $n > \frac{3}{\varepsilon}$ 时

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

所以可取 $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$ 为 N_ε.

在这里我们遇到变量的稀奇的性质: 变量依次地时而接近于其极限 0, 时而又离开它.

3) 现在设

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

在第 **27** 段中我们已见到它. 在这里也是 $x_n \to 0$, 因为要

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

就只要 $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

我们注意, 对于 n 的一切奇数值变量都等于它的极限.

这些简单的例子是很有趣的, 它们表征出了前面所下的极限定义中各种各样的可能性. 变量的数值是否都在它的极限的一方, 这是无关紧要的; 变量是否一步一步地接近于它的极限, 这也是

①参看第 **17** 段.

无关紧要的; 最后, 变量是否能达到它的极限, 也就是说, 是否能取得等于它的极限的数值, 这仍是无关紧要的. 重要的只在于定义中所说的: 变量与其极限的差终归要任意小, 也就是对于所有项数足够远的数值这个差要任意小.

4) 用公式

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1)$$

来定义变量 x_n, 我们可证明 $x_n \to 1$.

如果利用第 **11** 段中不等式 (3), 则可以写成:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \quad \text{只要} \quad n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

但也可用另外方法来证明. 不等式

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

等价于

$$\frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)},$$

因此, 当 $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right)$ 时它就成立.

由于所选的论证方法不同, 我们就得到不同的 N_ε 的表达式. 例如, 当 $a = 10, \varepsilon = 0.01$ 时我们按第一种方法得到 $N_{0.01} = \frac{9}{0.01} = 900$, 而按第二种方法得到 $N_{0.01} = E\left(\frac{1}{0.00432\cdots}\right) = 231$. 按第二种方法我们得到了 $N_{0.01}$ 的一切可能的数值中的最小者, 因为 $10^{\frac{1}{231}} = 1.010017\cdots$ 与 1 的差已大于 $\varepsilon = 0.01$. 在一般情形下也是如此.

我们注意, 如果只在讨论极限的存在问题, 我们就可以不管 N_ε的最小的可能数值. 不等式 (3) 的成立是应该要保证的, 至于它的成立是从远些的或者近些的位置开始, 那是可以不管的.

5) 重要的一个无穷小量的例子是

$$\alpha_n = q^n, \quad \text{其中} |q| < 1.$$

要证明 $\alpha_n \to 0$, 我们考察不等式

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon;$$

它等价于:

$$n \cdot \log|q| < \log\varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\text{①}.$$

因此, 若假设 (设 $\varepsilon < 1$)

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right),$$

则当 $n > N_\varepsilon$ 时上述不等式一定成立.

同样不难证实变量

$$\beta_n = Aq^n$$

①必须注意到, $|q| < 1$ 与 $\log|q| < 0$; 所以在用这数除不等式的两端时, 不等号应该换成相反的方向.

也是无穷小, 其中 $|q|<1$, 而 A 是常数.

6) 其次, 考虑无穷的递减几何序列

$$\div\div \quad a, \quad aq, \quad aq^2, \cdots, \quad aq^{n-1}, \cdots \quad (|q|<1)$$

并提出关于它的和的定义问题.

所谓无穷序列的和, 大家知道, 自然是它的首 n 项之和 s_n 当 n 无限增加时的极限. 但

$$s_n = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{n}{1-q}\cdot q^n,$$

可见变量 s_n 与常数 $\dfrac{a}{1-q}$ 相差之量 $\alpha_n = \dfrac{a}{1-q}\cdot q^n$, 就是我们刚才已看到的一个无穷小量. 因此, 依极限的第二个定义, 所求的序列的和为

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}.$$

31. 无穷大量 无穷大量 (简称无穷大) 在某种意义下是与无穷小量相对立的.

若变量 x_n 的绝对值, 对于足够大的 n 值, 可以变得并且保持**大于**任意预定大的数 $\mathrm{E}>0$:

$$|x_n| > \mathrm{E} \quad (\text{当 } n > N_{\mathrm{E}}),$$

则 x_n 叫做**无穷大**.

像在无穷小的情形一样, 在这里也应着重指出, 无穷大量所取的任何一个个别的数值都不能当作 “很大的” 量看待, 我们在这里, 所谈到的是变的量, 它只在自己的变化过程中最后才能够变到大于任意取定的数 E.

变量

$$x_n = n, \quad x_n = -n, \quad x_n = (-1)^{n+1}n$$

都是无穷大的例子, 它们遍历自然数序列, 不过第一个总带正号, 第二个总带负号, 第三个的符号则是正负相间的.

还有一个无穷大量的例子:

$$x_n = Q^n, \quad \text{当} |Q| > 1.$$

事实上, 不论 $\mathrm{E}>0$ 是怎样的数, 不等式

$$|x_n| = |Q|^n > \mathrm{E}$$

总能成立, 只要

$$n\cdot\log|Q| > \log\mathrm{E} \quad \text{或} \quad n > \frac{\log\mathrm{E}}{\log|Q|}\text{①},$$

因此, 可以取数

$$E\left(\frac{\log\mathrm{E}}{\log|Q|}\right)$$

当作 N_{E}.

①因为 $|Q|>1$, 所以 $\log|Q|>0$.

特别重要的是当无穷大量 x_n (至少对于所有足够大的 n) 保持着一定的符号 (+ 或 −) 的那种情形; 这时, 依符号为正或为负我们称变量 x_n 有极限 $+\infty$ 或 $-\infty$, 也说它趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$; 并且写作

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty \quad 或 \quad \lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty.$$

就这两种情形而言, 可以看情形怎样, 用不等式

$$x_n > \mathrm{E} \quad 或 \quad x_n < -\mathrm{E}$$

来代替不等式 $|x_n| > \mathrm{E}$, 以作为每种无穷大量的单独的定义, 由此就可推得分别地有 $x_n > 0$ 或 $x_n < 0$.

显然, 在一般情形下无穷大量 x_n 是由关系 $|x_n| \to +\infty$ 来表征的.

在前面所举的无穷大量的例子中, 显然, 变量 $x_n = n$ 趋向于 $+\infty$, 变量 $x_n = -n$ 趋向于 $-\infty$. 至于第三个变量 $x_n = (-1)^{n+1}n$, 则既不能说它趋向于 $+\infty$, 也不能说它趋向于 $-\infty$.

最后, 说到变量 $x_n = Q^n$, 只有当 $Q > 1$ 时才能说它趋向于 $+\infty$; 当 $Q < -1$ 时它既不趋向于 $+\infty$ 又不趋向于 $-\infty$①.

在第 6 段中我们已遇见过 "广义的数" $\pm\infty$, 必须记住, 它们的应用假定完全是有意义的, 并且对这些数进行算术运算时要小心. 我们常把 $+\infty$ 简写为 ∞.

最后, 我们叙述一下在无穷大量与无穷小量之间存在着的简单联系.

若变量 x_n 是无穷大, 则它的倒数 $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ 就是无穷小.

取任意数 $\varepsilon > 0$. 按无穷大的定义, 对于数 $\mathrm{E} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ 可找到这样的序数 N, 使得

$$只要\ n > N\ 就有\ |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

于是对于这种数值 n, 显然就有

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

这就证明了我们的命题.

同样也可以证明逆命题.

若变量 α_n (不会变成零的) 是无穷小, 则它的倒数 $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ 就是无穷大.

32. 函数极限的定义 考虑数的集合 $\mathscr{X} = \{x\}$. 若在点 a 的任何邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 内 [第 **28** 段] 含有 $\mathscr{X}$ 中异于 a 的 x 的数值, 则点 a 叫做这集合的**聚点**. 这时聚点本身可属于 $\mathscr{X}$ 或不属于 $\mathscr{X}$. 例如, 如果 $\mathscr{X} = [a, b]$ 或 $\mathscr{X} = (a, b]$, 则在两种情况下 a 都是 $\mathscr{X}$ 的聚点, 但在第一情况下 a 属于 $\mathscr{X}$, 而在第二情况下则不属于 $\mathscr{X}$.

在 a 是 $\mathscr{X}$ 的聚点的假设下, 可以从 $\mathscr{X}$ 中取出 —— 且可用无穷多种方法取出 —— 各异于 a 的 x 的数值, 作成这样一个序列

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \cdots, \quad x_n, \cdots, \tag{2}$$

①原书作 "它没有极限". —— 译者注

使得它以 a 为其极限. 事实上, 给定一收敛于零的正数序列 δ_n, 则在点 a 的每个邻域 $(a-\delta_n, a+\delta_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 内都可找到 $\mathscr{X}$ 中异于 a 的一点 $x=x_n$; 因为 $\delta_n \to 0$ 且 $|x_n - a| < \delta_n$, 所以

$$x_n \to a.$$

现在设在以 a 为其一聚点的区域 $\mathscr{X}$ 中给定了某一函数 $f(x)$. 这函数当 x 逼近于 a 时的性态是值得注意的. 如果不论自变量 x 通过怎样的一个以 a 为极限的并且是从 $\mathscr{X}$ 中取出的**序列** (2), 对应的函数值序列

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad f(x_3), \cdots, \quad f(x_n), \cdots \tag{5}$$

总有极限 A, 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时 (或在点 a 处) 有极限 A (有限的或无穷的). 我们把这一事实记成:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{6}$$

或者

$$\text{当} x \to a \text{时}, \quad f(x) \to A. \tag{7}$$

现在假定集合 $\mathscr{X} = \{x\}$ 含有任意大的正数值 x; 这时我们说, $+\infty$ 是这集合的一个聚点. 如果把区间 $(\Delta, +\infty)$ 理解为点 $+\infty$ 的邻域, 则所作的假定也可表述成这样的形式:在点 $+\infty$ 的每个邻域内应含有集合 $\mathscr{X}$ 内的数.

若这假定成立, 则从 $\mathscr{X}$ 中可以分出一个具有极限 $+\infty$ 的序列 (2) 来. 实际上, 取任一个趋向于 $+\infty$ 的正的变量序列 Δ_n, 则对于每一个 $\Delta_n (n=1,2,3,\cdots)$, 我们在 $\mathscr{X}$ 中可找到一个数值 $x_n > \Delta_n$; 显然, $x_n \to +\infty$.

在 $+\infty$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个聚点的假设下, 我们来考虑在这区域内所定义的函数 $f(x)$. 对于这个函数可以建立当 $x \to +\infty$ 时的极限概念

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

这完全和前面一样, 只要把 a 换成 $+\infty$.

同样, 当 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念也可建立:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

在这里只需要预先假定 $-\infty$ 是集合 $\mathscr{X}$ 的一个聚点 —— 其意义自然明显.

最后我们要说一下, 在第 **29** 段与第 **31** 段中就自然数为变元的函数所建立起来的术语, 如何转移到现在所考虑的函数极限的一般情形. 设当 x 趋向于一确定的极限时, 函数 $f(x)$ 趋向于零; 这时我们称这函数为无穷小量. 若函数 $f(x)$ 趋向于有限的极限 A, 则差数 $f(x)-A$ 就是无穷小; 反转来也是正确的. 当 $|f(x)|$ 趋向于 $+\infty$ 时我们称函数 $f(x)$ 为无穷大量[①]. 最后, 也不难把第 **31** 段末所建立的有关无穷小量与无穷大量之间的联系的定理转移到现在所考虑的一般情形.

① 如果这一情况发生于 $x \to a$ 时, 其中 a 为有限值, 则又称在点 a 处函数成为无穷大.

33. 函数极限的另一定义 在以前所研究较基本的序列的极限概念的基础上,我们建立了函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时的极限概念. 但是, 可以不利用序列的极限来给出函数的极限的另一定义.

我们首先就 a 与 A 两数都是有限的情形来讨论. 假定 a 是函数 $f(x)$ 的定义区域 $\mathscr{X}$ 的一个聚点, 于是极限的新定义可以叙述如下:

若对于任一数 $\varepsilon > 0$, 可求得这样的一个数 $\delta > 0$, 使得

$$\text{只要 } |x-a| < \delta, \quad \text{就有 } |f(x) - A| < \varepsilon \tag{8}$$

(其中 x 取自 $\mathscr{X}$ 内并且异于 a)[①]*, 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时以数 A 为其极限.*

这一定义与前面第 **32** 段中所给的定义完全等价. 为了证明起见, 我们首先假定刚才所述的条件成立, 并且对于任意选取的 $\varepsilon > 0$, 已在所指的意义之下找到与它相对应的数 $\delta > 0$. 从 $\mathscr{X}$ 内选出任意一个收敛于 a 的序列 (2) (并且所有的 x_n 都异于 a). 按序列的极限定义, 对应于数 $\delta > 0$ 有这样的序数 N, 使得当 $n > N$ 时不等式 $|x_n - a| < \delta$ 成立, 因而 [参考 (8)] $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ 也成立. 这就证明了序列 (5) 收敛于 A. 由此可见, 包含在以前的定义中的条件成立.

现在假定, 按照以前的定义函数的极限存在. 为了要证明包含在新定义中的条件也成立, 我们采用归谬证法. 假定对于某一个数 $\varepsilon > 0$, 没有对应的 δ, 就是说无论 δ 取得怎样小, 总可找到变量的一个数值 $x = x'$ (异于 a), 使得

$$\text{虽然 } |x' - a| < \delta, \quad \text{但仍有 } |f(x') - A| \geqslant \varepsilon.$$

取收敛于零的正数序列 δ_n. 根据刚才所述, 对于每一个数 $\delta = \delta_n$ 可找到这样的数值 $x' = x'_n$, 使得

$$\text{虽然 } |x'_n - a| < \delta_n, \quad \text{但仍有 } |f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

于是这些数值作成一个使

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

的序列

$$x'_1, \quad x'_2, \quad x'_3, \cdots, \quad x'_n, \cdots;$$

因为 $\delta_n \to 0$, 所以 $x'_n \to a$.

由假设, 对应的函数值序列

$$f(x'_1), \quad f(x'_2), \quad f(x'_3), \cdots, f(x'_n), \cdots$$

应该收敛于 A, 但这是不可能的, 因为对于一切的 $n = 1, 2, 3, \cdots$, 我们有 $|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon$. 所得的矛盾证明了我们的断言.

[①] 正因为 a 是 $\mathscr{X}$ 的聚点, 所以可知在点 a 的近邻 $(a-\delta, a+\delta)$ 内这种数值 x 一定存在.

当数 a 与 A 中有一个或者两个等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 也不难说明极限定义的新的形式. 我们以 $a=+\infty$ 与 A 为有限值 (或者也等于 $+\infty$) 的情形为例来引进新的定义:

若对于任一数 $\varepsilon>0$ $(\mathrm{E}>0)$ 可求得这样的数 $\Delta>0$, 使得

只要 $x>\Delta$ (x 在 $\mathscr{X}$ 内), 就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ $(f(x)>\mathrm{E})$, 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 $+\infty$ 时以有限的数 A (或 $+\infty$) 为极限.

这个定义与 "用序列说法" 的定义是等价的, 其证法像上面一样.

如果把这个定义应用到 (作为自变量 n 的函数的) 变量 x_n, 当 $n\to+\infty$ 时的情形, 我们就回到这种函数的起初的极限定义, 也就是回到第 **28** 段与第 **31** 段所给的序列的极限定义 (在那里 N 起着数 Δ 的作用). 由此可见, 一方面函数的极限以前的定义可归结为序列的极限; 同时序列的极限定义一般也是函数的极限定义 (在其新的形式下)的特殊情形. 这个极限, 我们以前曾用记号

$$\lim x_n$$

来表示, 现在按照新的定义应写成

$$\lim_{n\to+\infty} x_n.$$

可是, 实际上记号 $n\to+\infty$ 总可以省掉而不致发生误会, 因为在这里不能有任何其他的极限过程: 自然指数 n 的变域 $\mathbb{N}$ 有着唯一的聚点 $+\infty$.

虽然 (在新的形式下) 函数极限的各个定义随着对 a 与 A 的假设不同而有所区别, 可是它们的本质是一样的: 只要自变量包含在其极限 a 的适当选取的 "邻域" 内, 函数必定包含在其极限 A 的任意的 "邻域" 内.

总之, 我们得到在分析中重要的两个等价的函数的极限定义; 哪一个定义用起来方便, 我们就用哪一个.

34. 例 1) 类似于第 **30** 段, 5) 中已证明的极限关系

$$\lim a^{\frac{1}{n}}=1 \quad (a>1).$$

可以得到更一般的极限关系:

$$\lim_{x\to 0} a^x=1 \quad (a>1).$$

对于给定的 $\varepsilon>0$[①], 需要求出这样的 $\delta>0$, 使得

$$\text{只要}|x|<\delta, \quad \text{就有}|a^x-1|<\varepsilon.$$

后一不等式或者与它等价的两个不等式

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$$

①并且不妨设作 $\varepsilon<1$.

是成立的, 只要

$$\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon).$$

因为

$$\log_a(1-\varepsilon)+\log_a(1+\varepsilon)=\log_a(1-\varepsilon^2)<0 \quad \text{并且} \quad \log_a(1-\varepsilon)<-\log_a(1+\varepsilon),$$

所以只要

$$-\log_a(1+\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon) \quad \text{或者} \quad |x|<\log_a(1+\varepsilon),$$

则所说的两个不等式自然成立.

因此, 只要令 $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$, 就可使得当 $|x|<\delta$ 时有 $|a^x-1|<\varepsilon$. 这就完成了证明.

2) 求证

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (\text{当 } a>1).$$

对于任一个 $\mathrm{E}>0$ 只要取 $\Delta=\log_a \mathrm{E}$, 便可

$$\text{由 } x>\Delta \text{ 引出 } a^x>\mathrm{E},$$

这就证明了我们的断言[①].

同样可以证明

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (\text{当 } a>1).$$

就是说, 不论 $\varepsilon>0(\varepsilon<1)$ 怎样, 只要取

$$\Delta=\log_a\frac{1}{\varepsilon}=-\log_a\varepsilon,$$

则当 $x<-\Delta$ 时一定有 $a^x<\varepsilon$.

如果 $0<a<1$, 则利用变换

$$a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

容易建立下面的结果

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad (\text{当 } 0<a<1).$$

3) 当 $a>1$ 与 $x>0$ 时我们来建立

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty, \quad \lim_{x\to 0}\log_a x=-\infty.$$

对于任一给定的 $\mathrm{E}>0$, 只要 $x>a^{\mathrm{E}}$ 便有 $\log_a x>\mathrm{E}$; 同样, 只要 $0<x<a^{-\mathrm{E}}$ 不等式 $\log_a x<-\mathrm{E}$ 便成立. 这就证明了上面两个关系.

4) 其次, 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

---

① 在第 **31** 段中我们已有过较特殊的结果 $\lim a^n=+\infty$.

我们取第一个极限为例来讲述. 对于任一个 $\varepsilon > 0$, 只要取 $x > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, 就有 $\arctan x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, 于是

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon.$$

5) 现在我们要建立下面的 (*在以后也是重要的*) 结果:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{9}$$

我们需要预先证明有用的不等式:

$$\text{当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时 } \sin x < x < \tan x. \tag{10}$$

为了这个目的, 我们考虑在半径为 R 的圆中的锐角 $\angle AOB$, 弦 AB 以及在 A 点处圆周的切线 AC (图 19). 于是我们有: $\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<$ $\triangle AOC$ 的面积①.

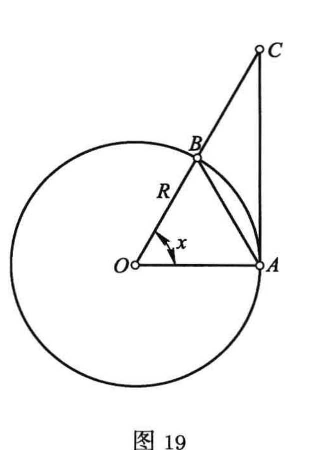


图 19

若用 x 表示角 AOB 的弧度, 因而弧 $\widehat{AB}$ 的长可由乘积 Rx 来表达, 则这些不等式可以改写成:

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \tan x.$$

由此 —— 约去 $\frac{1}{2}R^2$—— 我们就得到不等式 (10).

在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的假定下, 我们用不等式 (10) 的各项去除 $\sin x$ 便得:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

由此得

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

但

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin \frac{x}{2} < x.$$

[根据 (10)], 于是

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

由此推得不等式

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|.$$

它显然在 x 改变符号时也保持有效, 就是说, 对于一切的 $x \neq 0$, 只要 $|x| < \frac{\pi}{2}$, 它都是正确的.

①这里我们利用了在中学教本内已说明过的有关初等图形的面积的知识.

所得的不等式就解决了我们的问题. 事实上, 如果任意地给定了 $\varepsilon > 0$, 则只要选取 ε 与 $\frac{\pi}{2}$ 两数中的最小者作为 δ: 当 $|x| < \delta$ 时, 首先是上述不等式成立 $\left(因为 \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, 再根据它 (因为 $\delta \leqslant \varepsilon$) 就有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

6) 最后, 举一个函数的极限不存在的例子也是很有趣的: 函数 $\sin x$ 当 x 趋向于 $+\infty$ (或 $-\infty$) 时根本没有极限.

从 "序列的观点" 出发来证实极限的不存在总是比较容易的. 只要注意到对应于两个以 $+\infty$ 为极限的 x 值的序列

$$\left\{\frac{4n-1}{2}\pi\right\} \quad 与 \quad \left\{\frac{4n+1}{2}\pi\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

有着趋向于不同的极限的函数值的序列:

$$\sin\frac{4n-1}{2}\pi = -1 \to -1, \quad \sin\frac{4n+1}{2}\pi = 1 \to 1.$$

如果回忆起正弦曲线的 "振动" 的特性, 则在所考虑的情形下极限之不存在是很明显的.

同样, 函数 $\sin\frac{1}{\alpha}$ 当 α 趋向于零时 (无论是当 $\alpha > 0$ 或当 $\alpha < 0$) 没有极限. 实质上这不过是上面所引进的例子的另一形式: 只要在函数 $\sin x$ 中用 $\frac{1}{\alpha}$ 来代替 x. 显然, 如果 α 遍历趋向于零的正值 (负值) 序列, 则 $x = \frac{1}{\alpha}$ 趋向于 $+\infty(-\infty)$, 反之亦成立.

在表达式 $\sin\frac{1}{\alpha}$ 中把字母 α 仍写成字母 x (使成为惯用的横坐标记号) 并就 x 的值从 0 到 $\frac{2}{\pi}$ (与从 $-\frac{2}{\pi}$ 到 0) 来考虑所得的函数的图形

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

记出依次下降到 0 的 x 的数值:

$$\frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{\pi}, \quad \frac{2}{3\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}, \quad \frac{2}{5\pi}, \quad \frac{1}{3\pi}, \quad \frac{2}{7\pi}, \cdots, \quad \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad \frac{1}{n\pi}, \quad \frac{2}{(2n+1)\pi}, \cdots;$$

与它们相对应, 有着上升到 $+\infty$ 的 $\frac{1}{x}$ 的数值:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad 3\pi, \quad \frac{7\pi}{2}, \cdots, \quad \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n\pi, \quad \frac{(2n+1)\pi}{2}, \cdots.$$

在所述的 (当 x 下降时) 诸值之间的各个区间内我们的函数交错地由 1 下降到 0, 再由 0 下降到 -1, 然后由 -1 上升到 0, 再由 0 上升到 1, 等等. 由此可见, 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 类似于函数 $\sin x$ 有着无限多次的振动, 可是后者的振动分布在无穷的区间上, 而在这里 $\sin\frac{1}{x}$ 的振动则全在凝聚于 0 点的有限的区间内.

在图 20 上画出了它的图像. (自然是不完全的 —— 要表示出无限多次的振动是不可能的!)

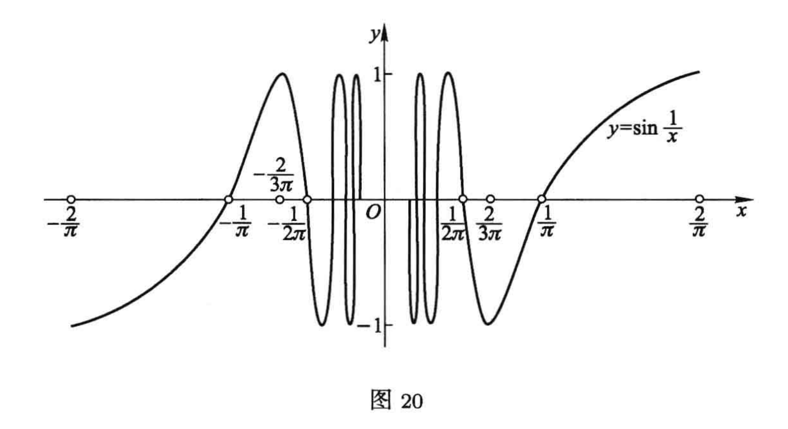


图 20

因为当 x 的符号改变时 $\sin\frac{1}{x}$ 的符号也改变, 所以图像的左半与右半关于原点是对称的.

7) 若就 $x\neq 0$ 来考虑函数 $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ (它与刚才已研究的函数 $\sin\frac{1}{x}$ 仅差一个乘数 x), 则当 $x\to 0$ 时这次却有极限存在:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

这个事实可以明显地从不等式

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|$$

看出来.

当 x 逼近于零时, 我们的函数仍然有着无限多次的振动, 可是它们的振幅 (由于有乘数 x 的缘故) 下降而趋向于零, 因此极限的存在得到保证.

函数

$$y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

的图像在图 21 中已画出, 它包容在坐标角的两条角平分线 $y=x$ 与 $y=-x$ 的中间①.

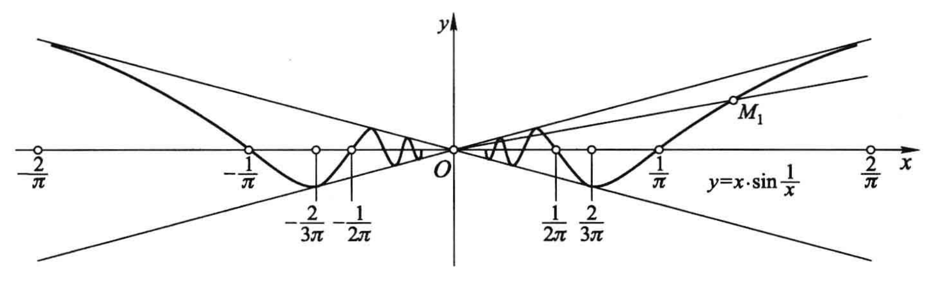


图 21

附注 我们已有极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

①在图 20 与图 21 上, 为求明晰起见, 不得不在 x 轴上取较大的尺度, 这就使函数的图像有了歪曲 .

它们具有一共同的特点: 在这里所考虑的函数中无论哪一个都在 $x=0$ 处没有定义. 但这并不妨碍我们说到当 $x \to 0$ 时它们的极限存在, 因为根据前面所给的定义的准确意义, 数值 $x=0$ 恰好这时是不必考虑的.

同样, 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时没有意义的这种情况, 也不妨碍我们提出当 $x \to 0$ 时它的极限的存在问题; 但这时极限并不存在.

35. 单侧极限 如果 $\mathscr{X}$ 是这样一种区域, 在 a 的右边任一近邻内可找到 $\mathscr{X}$ 中的数值 x, 则可以把第 **32** 段与第 **33** 段中所给的函数极限的定义特殊化, 使之仅限于讨论 $x>a$ 的数值. 在这种情形下函数的极限如果存在, 我们就称它为当 x **从右边**趋向于 a 时 (或简称在 a 点的**右边**) 函数 $f(x)$ 的极限, 并用下面的记号表示:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad 或 \quad f(a+0).$$

同样可以定义当 x **从左边**趋向于 a 时 (或在 a 点的**左边**) 函数的极限概念

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad 或 \quad f(a-0)^{①}.$$

这两个极限都叫做是单侧极限.

如果区域 $\mathscr{X}$ 从右边与从左边都可无限制地逼近于 a, 则两种极限都可以考虑. 不难查明, 要通常的 ("双侧的") 极限 (6) 存在, 必须且只需左右两极限分别地存在并且**相等**:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

我们要指出, 这两个极限可能都存在但并不相等. 从第 **34** 段中已考察过的例 1) 与例 4) 出发, 不难作出这种极限的例子.

例 我们就 $x \neq 0$ 用下面的两等式来定义两个函数:

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}}\,(a>1), \quad f_2(x) = \arctan\frac{1}{x}.$$

就其中第一个函数而言, 我们有:

$$f_1(+0) = \lim_{x\to+0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to+\infty} a^z = +\infty,$$
$$f_1(-0) = \lim_{x\to-0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to-\infty} a^z = 0.$$

就第二个函数而言, 有:

$$f_2(+0) = \lim_{x\to+0} \arctan\frac{1}{x} = \lim_{z\to+\infty} \arctan z = \frac{\pi}{2},$$
$$f_2(-0) = \lim_{x\to-0} \arctan\frac{1}{x} = \lim_{z\to-\infty} \arctan z = -\frac{\pi}{2}.$$

这两个函数的图像在图 22 与图 23 中已画出.

---

① 如果 $a=0$, 则 $0+0(0-0)$ 就简写为 $+0(-0)$.

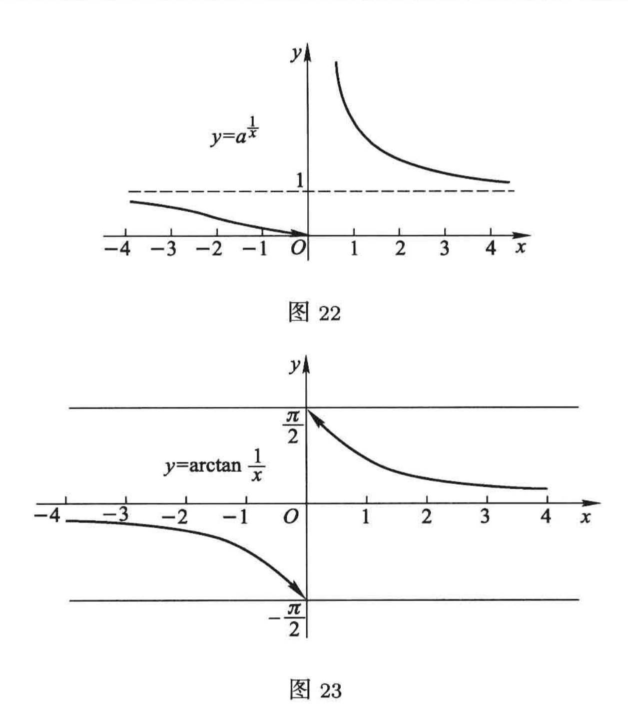


图 22

图 23

§2. 关于极限的定理

36. 具有有限的极限的自然数变元的函数的性质 因为关于自然数变元的函数的定理其叙述与证明都比在一般形式下的函数情形更为简单, 所以我们首先就这种特殊情形来叙述一些定理并加以证明, 然后只要作出一些把它们转移到一般情形的说明.

1) 若变量 x_n 趋向于极限 a, 并且 $a > p(a < q)$, 则变量的一切数值**从某一个开始**也都大于 p (小于 q).

选取正数 $\varepsilon < a - p(q - a)$, 我们有

$$a - \varepsilon > p \quad (a + \varepsilon < q).$$

但由变量 x_n 的极限的定义 [第 **28** 段], 对于这个 ε, 可找到这样的 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

就这些数值而言自然更有: $x_n > p(x_n < q)$.

这一简单的命题有着一系列的有用的推论.

2) 若变量 x_n 趋向于极限 $a > 0(< 0)$, 则变量本身**从某一位置开始**也必有 $x_n > 0(< 0)$.

要证明这断言, 只要应用上述命题, 选取 $p = 0(q = 0)$.

3) 若变量 x_n 趋向于极限 a, 并且总是

$$x_n \leqslant p \quad (\geqslant q),$$

则也有

$$a \leqslant p \quad (\geqslant q).$$

如若不然, 则得到与命题 1) 相矛盾的结果.

根据命题 1), 我们现在可证明极限的唯一性.

4) 变量 x_n 不能同时趋向于两个不同的 (有限的) 极限.

事实上, 假定命题不成立: 设同时有 $x_n \to a$ 与 $x_n \to b$, 并且 $a < b$. 在 a 与 b 之间取任一个数 r:

$$a < r < b.$$

因为 $x_n \to a$ 并且 $a < r$, 所以可求得这样的序号 N', 使得 $n > N'$ 时不等式 $x_n < r$ 成立. 另一方面, 由 $x_n \to b$ 并且 $b > r$, 所以可求得这样的序号 N'', 使得 $n > N''$ 时有 $x_n > r$. 若取大于 N' 与 N'' 的序号 n, 则变量 x_n 的对应值就要同时既小于 r 而又大于 r, 这是不可能的.

这一矛盾证明了我们的断言.

5) 若变量 x_n 有有限的极限, 则它是**有界的**, 就是说, 它的全部数值在两个有限的界限之间:

$$m \leqslant x_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1}$$

首先, 由极限的定义很明显的是, 不论取怎样一个 $\varepsilon > 0$, 可求得这样一个 N, 使得 $n > N$ 时有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

因此, 当 $n = N+1, N+2, \cdots$ 时, 各个数值 x_n 已落在界限 $a-\varepsilon$ 与 $a+\varepsilon$ 之内. 在这两界限之外只可能有序列的前面 N 个数值

$$x_1, \quad x_2, \cdots, \quad x_N$$

中的某些数值. 因为这种例外的值的个数总是有限的, 所以我们可以把上述的两个界限挪移为使得全部的数值 x_n 都已包含在两个新界限 m 与 M 之间. 例如, 我们可以取

$$a-\varepsilon, \quad x_1, \quad x_2, \cdots, \quad x_N$$

诸数中的最小者当作 m, 而取

$$a+\varepsilon, \quad x_1, \quad x_2, \cdots, \quad x_N$$

诸数中的最大者当作 M.

附注 由此可见, 具有有限的极限的变量, 不能同时又趋向于 $+\infty$ 或趋向于 $-\infty$. 这是关于极限唯一性的定理 4) 的一个补充.

37. 推广到任意变量的函数情形 不难把第 **36** 段中的内容转述到定义于具有聚点 a① 的某一个区域 $\mathscr{X}$ 中的函数 $f(x)$ 的一般情形.

1) *若当 x 趋向于 a 时函数 $f(x)$ 趋向于有限的极限 A, 并且 $A>p$ $(A<q)$, 则***对于充分接近于** *a 的 (但异于 a 的) x 的数值, 函数本身也满足不等式*

$$f(x)>p \quad (f(x)<q). \tag{2}$$

选取正数 $\varepsilon<A-p(q-A)$, 我们有

$$A-\varepsilon>p \quad (A+\varepsilon<q).$$

但按函数的极限的第二个定义 [第 **33** 段], 对于这个 ε 可找得这样的 δ, 只要 $|x-a|<\delta$ (其中 x 取自 $\mathscr{X}$ 并且异于 a), 就有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

对于这些 x 值不等式 (2) 自然也成立.

读者可看出, 在证明时并不需要引进任何新的观念.

由此可以直接地证实与第 **36** 段中的 2)、3)、4) 类似的断言. 例如, 在 1) 中令 $p=0$ $(q=0)$, 我们得到:

2) *若当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 有有限的正的 (负的) 极限, 则至少***对于充分接近于** *a 但异于 a 的 x 的数值, 函数本身也是正的 (负的).*

类似于 5) 的断言也是正确的, 但表现为较弱的形式:

3) *若当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 有有限的极限 A, 则***对于充分接近于** *a 的 x 的数值, 函数是有界的,* 就是说, 它的数值包含在两个有限的界限之间:

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \quad 只要\ 0<|x-a|<\delta.$$

事实上, 由极限的定义, 给定了 $\varepsilon>0$, 可找到这样的 $\delta>0$, 使得

$$当\ 0<|x-a|<\delta\ 时 \quad 有 A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

回忆到我们起初就变量 x_n 已得到的类似的结果:

$$当\ n>N\ 时不等式\ a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\ 成立.$$

可是在起初的情形下只能有有限多个 x_n 的数值在这两个界限 $a-\varepsilon$ 与 $a+\varepsilon$ 之外, 并且不难求得两个新的界限以使 x_n 的全部数值无例外地都包含在新的两界限之间. 在这里一般说来, 不能有同样的情形, 因为使 $|x-a|\geqslant\delta$ 的 x 的数值可以是无穷集. 例如, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (当 $x>0$), 当 $x\to 1$ 时趋向于 1; 显然, 只要 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$ 就有 $0<f(x)<2$; 可是对于所考虑的 x 的一切数值函数 $f(x)$ 绝不能是有界的: 当 $x\to+0$ 时 $f(x)$ 趋向于 $+\infty$.

①数 a 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$; 但为了确定起见我们只讲 a 是有限的这一情形.

38. 在等式与不等式中取极限 凡说到用等式或不等式把两个变量 x_n 与 y_n 结合起来, 我们所指的总是它们的对应的数值, 也就是指具有同样的序号的数值.

1) 若两个变量 x_n, y_n 在它们的一切变化下是相等的: $x_n = y_n$, 并且每个变量都有有限的极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则此两极限也相等: $a = b$.

这可从极限的唯一性 [第 **36** 段, 4)] 直接推知.

这个定理通常写成在等式中取极限的形式: 由 $x_n = y_n$ 得出结论: $\lim x_n = \lim y_n$.

2) 若对于两个变量 x_n, y_n 不等式 $x_n \geqslant y_n$ 常成立, 并且每个变量都有有限的极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则也有 $a \geqslant b$.

假定不是如此: 设 $a < b$. 像在第 **36** 段, 4) 中一样来讨论, 我们在 a 与 b 之间取数 r 使 $a < r < b$. 于是一方面可求得这样的序号 N', 使得当 $n < N'$ 时有 $x_n < r$, 另一方面又可求得这样的序号 N'', 使得当 $n > N''$ 时有 $y_n > r$. 若 N 大于 N' 与 N'' 两数, 则对于各序号 $n > N$ 下面两个不等式同时成立

$$x_n < r, \quad y_n > r, \quad \text{因而} \quad x_n < y_n,$$

这与假设相矛盾. 定理就已证明.

这个定理建立了在不等式 (连带有等号的) 中取极限的规则: 由 $x_n \geqslant y_n$ 可以肯定 $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

当然, 各处的 $>$ 号都可换成 $<$ 号.

望读者注意, 从严格的不等式 $x_n > y_n$, 一般说来, 不能推得严格的不等式 $\lim x_n > \lim y_n$, 而只能推得: $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. 例如, 对于一切的 n 有 $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$, 但是

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

从定理 2) 可得到第 **36** 段中的断言 3) 作为一特例.

在确定极限的存在与极限的大小时, 下面的定理往往是有用的:

3) 若对于变量 x_n, y_n, z_n 不等式

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

常成立, 并且变量 x_n 与 z_n 趋向于公共的极限 a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

则变量 y_n 也有同样的极限:

$$\lim y_n = a.$$

给定任一个 $\varepsilon > 0$. 对于这个 ε, 首先可求得这样的序号 N', 使得当 $n > N'$ 时有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

其次又可求得这样序号 N'', 使得当 $n > N''$ 时有

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

设 N 大于 N' 与 N'' 两数; 于是当 $n > N$ 时, 前面两个二重不等式都成立, 因而有

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

最后, 当 $n > N$ 时有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad 或者 \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

由此可见, 确实有 $\lim y_n = a$.

从这个定理, 特别可推得: *若对于一切的 n 有*

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

并且已知 $z_n \to a$, 则也有 $y_n \to a$. 要直接证明这个事实也是容易的.

定理 1)、2) 与 3) 不难推广到无穷极限的情形.

39. 关于无穷小量的引理 在以后各个定理中我们需要同时考察两个 (或更多个) 变量, 并且要对它们作算术运算. 这时和前面一样, 我们所指的是对这些变量的对应数值作这些运算. 例如, 说到两个变量 x_n 与 y_n 的和时, 如果它们分别地取下面两序列的数值

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \cdots, \quad x_n, \cdots$$

及

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \cdots, \quad y_n, \cdots,$$

我们就有变量 $x_n + y_n$, 它依次取下面一序列的数值:

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad x_3 + y_3, \cdots, \quad x_n + y_n, \cdots.$$

在证明关于变量的算术运算的定理时, 下面两个关于无穷小量的引理是有用的:

引理 1 *任何有限多个无穷小量的和也是一个无穷小量.*

我们只就两个无穷小量 α_n 与 β_n 的情形来进行证明 (一般的情形可以同样地讨论).

给定任意的数 $\varepsilon > 0$. 根据无穷小量的定义, 对于数 $\frac{\varepsilon}{2}$, 就无穷小量 α_n 而言可求得这样的序号 N', 使得当 $n > N'$ 时有

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

同样就无穷小量 β_n 而言也可求得这样的序号 N'', 使得当 $n > N''$ 时有

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若取大于 N' 与 N'' 两数的自然数 N, 则当 $n > N$ 时这两个不等式同时成立, 可见

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 $\alpha_n + \beta_n$ 确实是无穷小量.

引理 2 有界变量 x_n 与无穷小量 α_n 的乘积是无穷小量.

设对于一切的值 n 有

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

用 L 表示绝对值 $|m|$、$|M|$ 中较大者, 我们有

$$-L \leqslant x_n \leqslant L \quad \text{或者} \quad |x_n| \leqslant L.$$

若给定任意的 $\varepsilon > 0$, 则对于数 $\frac{\varepsilon}{L}$, 就无穷小量 α_n 而言可求得这样的序号 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

于是对于这些数值 n 显然有

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

由此可见, $x_n \cdot \alpha_n$ 是无穷小量.

40. 变量的算术运算 下面几个定理是很重要的, 因为在许多情形中利用这些定理就不必每次都追究到极限概念的定义 —— 按照给定的 ε 去求对应的 N, 等等. 利用这些定理, 可大大地简化极限的计算.

1) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则它们的和 (差) 也有有限的极限, 并且

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

由定理中的条件推得

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \tag{3}$$

其中 α_n 与 β_n 是无穷小量, 于是

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

在这里 $\alpha_n \pm \beta_n$ 由第 **39** 段中的引理 1 是无穷小量; 因此, 可以肯定变量 $x_n \pm y_n$ 有极限等于 $a \pm b$, 这就是所要证明的.

这个定理以及它的证明可以推广到任何有限多个项的情形.

2) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

则它们的乘积也有有限的极限, 并且

$$\lim x_n y_n = ab.$$

从同样的等式 (3) 出发, 我们这时有

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n).$$

由引理 1 与 2, 在括号内的表达式是无穷小量. 由此可见, 变量 $x_n y_n$ 实际上有极限 ab.

这个定理可以推广到任何有限多个因子的情形 (例如, 应用数学归纳法即可).

3) 若变量 x_n 与 y_n 有有限的极限:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

并且 b **异于零**, 则它们的比也有有限的极限, 就是说,

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

譬如说, 设 $b > 0$; 在零与 b 的中间插入一数 r. 于是由第 **36** 段中的断言 1) , 从某一项起有

$$y_n > r > 0,$$

因此无论如何 $y_n \neq 0$. 限定取使这不等式成立的序数 n 的那些数值; 于是比 $\frac{x_n}{y_n}$ 显然有意义.

仍由等式 (3) 出发, 我们有

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

根据引理 1 与 2, 在括号内的表达式是无穷小量, 而它的乘数根据开始所述是有界变量:

$$0 < \frac{1}{by_n} < \frac{1}{br}.$$

因此, 由引理 2, 等式右端的乘积是无穷小量, 但它表示变量 $\frac{x_n}{y_n}$ 与数 $\frac{a}{b}$ 的差. 于是 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限是 $\frac{a}{b}$, 这就是所要证明的.

41. 未定式 在前段中我们已考察过表达式

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{4}$$

并且在变量 x_n 与 y_n 趋向于有限的极限的假设下 (在两变量的商的情形, y_n 的极限应该不等于零), 确定了每个表达式的极限.

剩下来尚未考察的, 是当变量 x_n 与 y_n (其中一个或两者) 的极限为无穷大时或者 (若论及两变量的商) 当分母的极限为零时的情形. 在这些情形中, 我们此时只讲述四种重要的而且有趣的特异性.

1° 首先考察商 $\frac{x_n}{y_n}$ 并假设两变量 x_n 与 y_n 同时趋向于零. 在这里我们头一次遇到十分特殊的情况: 虽然我们已知 x_n 与 y_n 的极限, 可是关于它们之比的极限 —— 在不知道这两个 n 的函数的本身时 —— 我们不能作出任何一般的断言. 这个极限, 依赖于这两变量变化的特殊规律, 可以有各种不同的数值, 或甚至不存在. 下面的一些简单的例子可以说明这一点.

设 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$; 这两个变量都趋向于零. 它们的比 $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ 也趋向于零. 如果反过来令 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$, 则虽然它们都趋向于零, 但这次它们的比 $\frac{x_n}{y_n} = n$ 却趋向于 $+\infty$! 取任何不同于零的数 a 并作出两个无穷小量 $x_n = \frac{a}{n}$ 与 $y_n = \frac{1}{n}$, 我们看出, 它们之比以 a 为极限 (因为比值恒等于 a).

最后, 若 $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ (两者都以零为极限), 则比 $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ 根本没有极限.

由此可见, 只知道变量 x_n 与 y_n 的极限, 在目前情况下还不能判断它们之比的性态: 必须知道两个函数本身, 即它们与 n 一起的变化规律, 并且要直接研究比 $\frac{x_n}{y_n}$. 为了要表征出当 $x_n \to 0$ 与 $y_n \to 0$ 时这一特异性, 我们说式子 $\frac{x_n}{y_n}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型的**未定式**.

2° 在同时有 $x_n \to \pm\infty$ 与 $y_n \to \pm\infty$ 的情形下, 也有类似的情况, 不知道两函数本身, 绝不能作出关于它们之比的性态的一般断言. 这个事实可用完全类似于 1° 所

引进的例子来说明:

$$x_n = n \to \infty, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$
$$x_n = n^2 \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$
$$x_n = an \to \pm\infty(a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$
$$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]n \to \infty, \quad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1} \text{ 根本没有极限.}$$

在这情形下我们说, 式子 $\frac{x_n}{y_n}$ 这时表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的**未定式**.

转过来考察乘积 $x_n y_n$.

3° 若 x_n 趋向于零, 同时 y_n 趋向于 $\pm\infty$, 则研究乘积 $x_n y_n$ 的性态时, 我们又遇到像在 1° 与 2° 中同样的特异性. 关于这点可由下面的几个例子来说明:

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad y_n = n^2 \to \infty, \quad x_n y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0(a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = a \to a;$$
$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \quad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1} \text{ 根本没有极限.}$$

在 $x_n \to 0$ 与 $y_n \to \infty$ 这情形下, 我们说, 式子 $x_n y_n$ 表示 $0 \cdot \infty$ 型的**未定式** .

最后, 我们来考察和 $x_n + y_n$.

4° 在这里也出现特殊的情形, 即当 x_n 与 y_n 趋向于异号的无穷大时的情形: 在这情形下, 如不知道函数 x_n 与 y_n 的本身, 就不能谈到 $x_n + y_n$ 的任何确定的极限. 在这里所表现的各种不同的可能性可用下面的一些例子来说明:

$$x_n = 2n \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = n \to +\infty;$$
$$x_n = n \to +\infty, \quad y_n = -2n \to -\infty, \quad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$
$$x_n = n + a \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = a \to a;$$
$$x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = (-1)^{n+1}$$
根本没有极限.

因此, 当 $x_n \to +\infty$ 与 $y_n \to -\infty$ 时, 我们说式子 $x_n + y_n$ 表示 $\infty - \infty$ 型的**未定式**.

由此可见, 要由变量 x_n 与 y_n 的极限来确定由它们组成的算术式 (4) 的极限并非永远可能的. 我们发现了四种明显不可能的情形, 那就是型为

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

的未定式①. 在这些情形下, 必须考虑到 x_n 与 y_n 的变化规律, 必须直接地研究我们所关心的式子. 类似的研究法叫做未定式的定值法. 这种定值法并不永远像在上面所举的简单例子中那样简单.

42. 推广到任意变量的函数情形 我们再作出关于一般情形的说明. 因为在这里我们所指的是这样一些定理, 其中的变量是用等式或算术运算等符号来联系的, 所以我们首先应该说明, 把两个或几个 (在同一个区域 $\mathscr{X}$ 中所定义的) 函数 $f(x), g(x), \cdots$ 用这种符号结合起来, 我们总是把它们的数值理解为对应于同一个 x 的数值.

所有这些定理都可以用类似于第 **37** 段中所使用的方法重新来证明, 但 —— 也应郑重指出 ——实际上没有必要去重复证明它们. 如果从 “序列的观点” 出发来谈函数的极限, 那么, 这些定理既然对于依赖于附标数 n 的变量已被证明, 它们也就对于一般情形下的函数是正确的.

我们限于第 **40** 段中的定理 1)、2)、3) 作为例子.

设在区域 $\mathscr{X}$ (具有聚点 a) 中给定了两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 并且当 x 趋向于 a 时两函数都有有限的极限

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

于是函数

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5}$$

也有有限的极限 (在两函数之商的情形下并假定 $B \neq 0$), 那就是

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}.$$

用 “序列的语言” 可把所给关系解释为: 若 $\{x_n\}$ 是任一个从 $\mathscr{X}$ 内所取出的 (各异于 a 的) x 的数值的序列并且有极限 a, 则

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B.$$

如果已经证明的定理应用到这两个已以自然数 n 为变元的函数, 则立即得到:

$$\lim[f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim f(x_n) \cdot g(x_n) = A \cdot B,$$
$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

而这 (用 “序列的语言”) 也正表达着所需要证明的定理②.

① 当然, 这些记号是毫无数字的意义的. 其中各记号只是这四种类型未定式的简短而有条件的特征表达式而已.

② 在商的情形下可注意到, [类似于在第 **40** 段, 3) 中我们就 y_n 所做过的那样], 对于充分接近于 a 的 x 的数值分母 $g(x) \neq 0$, 因而分数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 至少对于这些 x 的数值有意义.

由此可见, 在第 **41** 段中所说的有关于由约定的记号

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty$$

所表征的 “未定式” 的事情, 可以转移到我们现在所考虑的一般情形. 像在与自然数变元的函数有关系的最简单的情形中一样, 在这里要 “确定未定式的值”, 仅知道函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限是不够的, 还必须考虑到它们的变化规律. 读者在下一段中可找到确定未定式的值的一些例子.

在第七章的 §3 中我们还要回头来讲述这个问题, 在那里将给出应用微分学来确定未定式的值的一般方法.

43. 例 1) 设 $p(x)$ 是具有常数系数的 x 的整多项式:

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k\quad (a_0\neq 0).$$

我们提出当 $x\to+\infty$ 时它的极限问题. 如果这个多项式所有的系数都是正的 (负的), 则很明显, $p(x)$ 的极限是 $+\infty$ $(-\infty)$. 但在它的系数具有不同的符号的情形下, 就有一些项趋向于 $+\infty$, 另一些趋向于 $-\infty$, 于是有 $\infty-\infty$ 型的未定式.

为要确定这未定式的值, 我们把 $p(x)$ 表成下形:

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right).$$

因为括号内所有各项从第二项起当 x 无限增大时都是无穷小量, 所以在括号内的表达式具有极限 $a_0\neq 0$; 第一个因子也趋向于 $+\infty$. 在这情形下整个表达式趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 依 a_0 的符号为正或为负来决定.

特别情形, 如果以自然数 n 来替代连续变化的变量 x, 也得到同样的结果.

让读者去确定当 $x\to-\infty$ 时的 $\lim p(x)$ (这回要考虑到指数 k 是偶数或是奇数). 在一切情形下多项式 $p(x)$ 的极限与它的首项 a_0x^k 的极限相同.

用已知表达式的变形法来消除 “未定性” 是常常应用于确定未定式的一种方法, 我们在这里也已利用了它.

2) 若 $q(x)$ 也是这样的一个多项式

$$q(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}x+b_l\quad (b_0\neq 0),$$

则商 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 当 $x\to+\infty$ 时表示 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式.

把其中每一个多项式像在例 1 中一样变形, 我们得到:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=x^{k-l}\cdot\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_k}{x^k}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_l}{x^l}}.$$

第二个因子这时有有限的极限 $\dfrac{a_0}{b_0}\neq 0$. 如果两多项式的次数相等: $k=l$, 则比 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 也有这同样的极限. 当 $k>l$ 时, 第一个因子当 $x\to+\infty$ 时也趋向于 $+\infty$, 因而所考虑的比趋向于 $\pm\infty$ (依 $\dfrac{a_0}{b_0}$ 的符号来决定). 最后, 当 $k<l$ 时极限为零. 在这里 x 也可以用自然数 n 来代替.

不难确定 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限. 在一切情况下两多项式之比的极限与它们的首项之比的极限相同.

3) 试求由抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 上的部分 OM, x 轴上的线段 OP 以及线段 PM (图 24) 所作成的图形 OPM 的面积 Q.

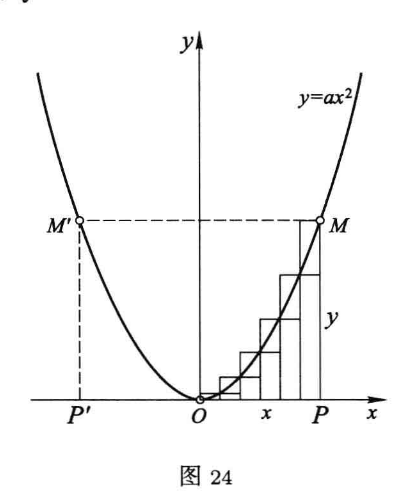


图 24

把线段 OP 分成 n 等分, 并在各个等分上作抛物线的内接与外接矩形. 由这些楼梯形作成的面积 Q_n 与 Q'_n 之差是一个最大的矩形的面积 $\dfrac{x}{n} \cdot y$. 因此差数 $Q'_n - Q_n \to 0$ (当 $n \to \infty$ 时), 并且由于

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

所以显然有

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

因为各个单独的矩形的高是抛物线上具有横坐标

$$\frac{1}{n}x, \quad \frac{2}{n}x, \cdots, \frac{n}{n}x = x$$

的各点的纵坐标, 并且 —— 由曲线的方程 —— 它们的大小分别地等于

$$a \cdot \frac{1}{n^2}x^2, \quad a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2 \cdots, a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

所以我们得到 Q'_n 的表达式①

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \cdot \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

因此, 如果利用例题 2), 便知

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

根据这个结果, 不难知道抛物线弓形 $M'OM$ 的面积等于 $\dfrac{4}{3}xy$, 也就是等于它的外接矩形的面积的三分之二 (这个结果早已为阿基米德所知道)②.

①在这里我们利用了前 n 个自然数的平方之和的著名公式.

②阿基米德是古代 (公元前三世纪) 最伟大的一个数学家.

附注 曲线形面积的一般定义只好在第十二章中去讲; 这里所应用的面积的计算法将在那里推广, 使适用于其他的曲线图形 [第 **196** 段].

4) 试求两变量

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

的极限, 再求变量

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

的极限.

变量 x_n 与 z_n 表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式 (因为两者的根式都大于 n, 所以它们都趋于无穷大). 用 n 除分子与分母把它们变形:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

因为在两式的分母中根式都以 1 为极限①, 所以 $x_n \to 1$, $z_n \to 1$.

至于 y_n 的表达式, 则具有特有的形状: 这个和的每一项都依赖于 n, *而且其项数也随着 n 而增加*. 因为每一项都小于首项而大于末项, 所以

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < y_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad 即 \quad x_n < y_n < z_n.$$

但 (根据已求得的结果) 变量 x_n 和 z_n 趋向于共同的极限 1, 所以, 由第 **38** 段中定理 3), 变量 y_n 也趋向于这同一个极限.

5) 回转来讲第 **18** 段, 3° 中已考察过的函数 $f(x)$, 它是由三个不同的公式 (对于不同的 x) 所定义的, 现在*对于一切的 x 同时*可令:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

若 $|x| > 1$, 则在这里我们有 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式, 用 x^{2n} 来除分子分母易于化去它的未定性; 我们得到: $f(x) = 1$. 当 $|x| < 1$ 时, 显然 $x^{2n} \to 0$ 且 $f(x) = -1$. 最后, 若 $x = \pm 1$, 则分数的分子常等于零, 因而 $f(x) = 0$. 丝毫不差地这是那同一个函数, 可是这次它是由一个公式给出.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

实际上,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1};$$

但

$$1 - |x| < \sqrt{1+x} < 1 + |x|,$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1,$$

由此得到所要求的结果.

---

①例如, 就第一个根式而言, 这可由不等式 $1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$ 推得 [第 **38** 段, 3)].

7) 极限 [第 **34** 段, 5)]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

常被用来求其他的极限.

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

显然,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2;$$

因为括号内的式子趋向于 1, 所以总的极限就是 $\frac{1}{2}$.

$$\text{(b)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

在这里变形方法引到已研究过的各极限:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

我们注意到, 当 $x \to 0$ 时 $\cos x \to 1$, 就可由前一结果 (a) 推出这里的结果.

§3. 单调函数

44. 自然数变元的单调函数的极限 关于函数的极限的存在定理 (到现在为止已为我们所引出过的) 有着这样的特点: 先假定了某些函数的极限存在, 然后来证明另一些与前者总是有联系的函数的极限也存在. 当所给的函数与其他的函数无关时, 却尚未提出关于判断有限的极限的存在问题. 这个问题的一般形式的解答留待 §5 中去讲, 我们在这里只考虑一种简单而重要的特殊的函数类, 就这类函数而言, 极限的问题很容易解决, 并且像平常一样我们从最简单的情形 —— 自然数变元的函数 x_n—— 开始.

变量 x_n 叫作是上升的, 如果

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots,$$

也就是说, 如果从 $n' > n$ 可推得 $x_{n'} > x_n$. 若

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

也就是说, 若由 $n' > n$ 只推得 $x_{n'} \geqslant x_n$, 则变量 x_n 叫作是不下降的. 在后一情形下也可以称变量是上升的, 只要对上升一语给以更宽泛的意义.

同样可以建立下降的 —— 在狭义或广义下 —— n 的函数的概念: 变量 x_n 叫作是下降的, 只要对于它对应地有:

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

或

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{x+1} \geqslant \cdots,$$

因而从 $n' > n$ 推得 (看情形决定) $x_{n'} < x_n$ 或只是 $x_{n'} \leqslant x_n$.

所有这种当 n 上升时向一个方向改变的变量, 总称为单调变量. 关于这个类型的变量, 我们通常说它 "单调上升" 或者 "单调下降".

同时, 不但是依赖于自然数附标的变量 x_n 称为上升或下降的, 而且这个变量的值的序列在对应的情形下也叫作是上升序列或下降序列:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

关于单调变量有着下面的定理.

定理 设已给单调上升的变量 x_n. 如果它上有界:

$$x_n \leqslant M \quad (M = \text{常数}; n = 1, 2, 3, \cdots),$$

则它必有**有限的**极限; 在相反的情形下, 它趋向于 $+\infty$.

完全同样, 单调下降的变量 x_n 也常有极限. 如果它下有界, 则它的极限是**有限的**; 在相反的情形下, 它的极限是 $-\infty$.[①]

证明 我们只讲述变量 x_n 上升的情形, 即使是广义上升的也行 (下降变量的情形同样地可证明).

首先假定这变量上有界. 于是由第 **6** 段的定理, 对于它的数值的集 $\{x_n\}$ 必存在 (有限的) 上确界:

$$a = \sup\{x_n\};$$

我们要证明这个数 a 就是变量 x_n 的极限.

实际上, 回忆一下 [第 **6** 段] 上确界的特性, 我们知道: 第一, 对于 n 的一切数值有

$$x_n \leqslant a;$$

第二, 不论取怎样的数 $\varepsilon > 0$, 总可求得变量的这样一个数值, 譬如说 x_N, 使得 x_N 超过 $a - \varepsilon$:

$$x_N > a - \varepsilon.$$

因为, 由变量 x_n 的单调性 (在这里我们首次用到它), 当 $n > N$ 时有 $x_n \geqslant x_N$, 因而更加有 $x_n > a - \varepsilon$, 所以对于序号 n 的这些数值下面不等式成立:

$$0 \leqslant a - x_n < \varepsilon, \quad \text{因而} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

---

①不难理解, 全部的结论对于那种从某一位置开始才变成单调的变量也保持有效 (因为抛弃任何多个起头的数值, 对于变量的极限并无影响).

在定理的叙述中, 可以不说单调变量 x_n, 而改说单调序列.

由此推得, $\lim x_n = a$.

现在设变量 x_n 不是上有界. 于是不论 $\mathrm{E} > 0$ 是怎样大的数, 仍可求得变量的一个数值大于 E; 设这数值是 $x_N : x_N > \mathrm{E}$. 由变量 x_n 的单调性当 $n > N$ 时更加有

$$x_n > \mathrm{E},$$

而这就是说, $\lim x_n = +\infty$.

附注 有界单调变量具有有限的极限这个事实, 在 19 世纪的前半期认为是不言而喻的. 要求这一具有基本重要性的论断得到严格的证明, 实际上也是建立无理数的算术理论的一个原因. 再补充说一句, 上述的论断与实数集合的连续性质 [第 **5** 段] 完全是等价的.

我们来讲定理应用的例题.

45. 例 1) 考虑表达式 (算作 $c > 0$)

$$x_n = \frac{c^n}{n!},$$

其中 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ (它在 $c > 1$ 时表示 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式).

因为

$$x_{n+1} = \frac{c}{n+1} x_n,$$

所以只在 $n > c - 1$ 时变量才变成下降的: 同时它是下有界的, 例如 $x_n > 0$, 因此, 变量 x_n——按照定理 —— 有有限的极限, 用 a 来表示它.

为了要求出 a, 我们在上面的等式中取极限; 因为 x_{n+1} 与 x_n 取同样的一序列数值 (除了第一项以外), 并且有同一个极限 a, 所以我们得到

$$a = a \cdot 0,$$

由此得 $a = 0$, 最后有

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) 再设 $c > 0$, 我们现在定义 x_n 为:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \cdots$$

一般地说

$$x_n = \sqrt{c + \underbrace{\sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}_{n\text{ 个根式}}}.$$

于是依公式

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$$

由 x_n 可求得 x_{n+1}.

显然, 变量 x_n 单调上升. 同时它是上有界的, 例如各个 $x_n < \sqrt{c} + 1$. 实际上, $x_1 = \sqrt{c}$ 小于这个数; 如果现在假定某一个数值 $x_n < \sqrt{c} + 1$, 则对于它后面的数值也得到

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

因此, 由数学归纳法我们的论断得到证实.

根据基本定理变量 x_n 有某一个有限的极限 a. 为要确定它, 我们在等式

$$x_{n+1}^2 = c + x_n$$

中取极限; 于是知道 a 满足二次方程

$$a^2 = c + a.$$

这个方程有异号的两个根; 但我们所要的极限 a 不能是负的, 所以, a 就等于其正根:

$$a = \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}① .$$

上面两个例题引出了下面的附注: 已经证明的那个定理是典型的 "存在定理": 在这定理中只建立了极限存在的事实, 但没有给出任何计算极限的方法. 虽然如此, 但它有着非常重要的意义. 因为一方面, 在理论问题中往往只是极限的存在性是需要的. 另一方面, 在许多情形中预先证明极限存在的可能是很重要的, 它开辟了实际计算这极限的途径. 像在所举的例题中, 就是先知道了极限存在的事实, 才许可在某些等式中用极限步骤来确定极限的确实数值.

46. 关于区间套的引理 我们现在来讲两个"相向" 变化着的单调变量.

设已给单调上升的变量 x_n 与单调下降的变量 y_n, 并且总有

$$x_n < y_n. \tag{1}$$

若它们的差 $y_n - x_n$ 趋向于零, 则两变量具有公共的有限的极限:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

实际上, 对于 n 的一切数值有 $y_n \leqslant y_1$, 因而由 (1) 式又有 $x_n < y_1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 上升的变量 x_n 是上有界的, 因此它有有限的极限

$$c = \lim x_n.$$

同样, 对于下降的变量 y_n 来说有

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

因而它也趋向于有限的极限

$$c' = \lim y_n.$$

①这个有趣的例题实际上是雅各布 · 伯努利的, 他考察过形如

$$\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots}}} \text{ 以至无穷}$$

的表达式.

但由第 **40** 段中的定理 1), 两极限的差

$$c' - c = \lim(y_n - x_n),$$

即按条件它应等于零, 因而有 $c' = c$; 这就是所要证明的.

对于这个已证明的断言可给以另一种常被应用的形式.

我们约定说, 区间 $[a', b']$ 包含在区间 $[a, b]$ 之内或者套在其内; 只要第一个区间的全部点属于第二个区间, 或者说, 只要

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b$$

也是一样. 它的几何意义是很明显的.

设有一个套着一个的区间的无穷序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots,$$

后面的每一个总包含在其前面的一个之内[①], 并且当 n 上升时这些区间的长度趋向于零:

$$\lim(b_n - a_n) = 0.$$

于是区间的端点 a_n 与 b_n (从不同的两边) 趋向于公共的极限

$$c = \lim a_n = \lim b_n.$$

这只是前面已证明的定理的另一种说法: 根据条件, 有

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

所以第 n 个区间的左端 a_n 与右端 b_n 在这里担当着单调变量 x_n 与 y_n 的角色.

以后我们时常要用到这个命题, 就称它为 "关于区间套的引理".

47. 在一般情形下单调函数的极限 我们现在重新来考虑任意变量的函数 $f(x)$. 在这里关于函数的极限

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

的存在问题, 对于由单调变量 x_n [第 **44** 段] 这概念推广来的特殊类型的函数, 可特别简单地来解决.

设函数 $f(x)$ 是在某一区域 $\mathscr{X} = \{x\}$ 内所定义的. 若对于这区域内任意一对数值 x 与 x',

$$\text{从 } x' > x \text{ 可推得 } f(x') > f(x) [f(x') < f(x)],$$

则 $f(x)$ 叫做在这区域内的增 (减) 函数 .

[①] 以后我们简称这种序列为区间套. —— 译者注

如果

$$\text{从 } x' > x \text{ 只推得 } f(x') \geqslant f(x)[f(x') \leqslant f(x)],$$

则函数 $f(x)$ 叫做不减 (不增) 函数 . 在这情形下有时也称函数是广义增 (减) 函数较为便利.

所有这种类型的函数总称为单调函数. 对于单调函数有着完全类似于第 **44** 段中所建立的关于依赖于 n 的单调变量 x_n 的定理.

定理 设函数 $f(x)$ 在区域 $\mathscr{X}$ 内是单调增的, 即使是广义增的也行, 区域 $\mathscr{X}$ 有比 x 的一切数值大的数 a 为其一聚点 (a 可以是有限的或等于 $+\infty$). 若这时函数是上有界的:

$$f(x) \leqslant M \quad (\text{对于 } \mathscr{X} \text{ 内的一切 } x),$$

则当 $x \to a$ 时函数有有限的极限; 在相反的情形下它趋向于 $+\infty$.

证明 先假定函数 $f(x)$ 是上有界的, 即当 x 在区域 $\mathscr{X}$ 内变化时函数的对应值的集合 $\{f(x)\}$ 是上有界的. 于是这一集合有着有限的上确界 A [第 **6** 段]. 我们来证明这个数 A 就是所求的极限.

首先, 对于 x 的一切数值有

$$f(x) \leqslant A.$$

其次, 给定任意一数 $\varepsilon > 0$, 由上确界的性质可求得这样的数值 $x' < a$, 使得 $f(x') > A - \varepsilon$. 由函数的单调性, 当 $x > x'$ 时就更加有: $f(x) > A - \varepsilon$, 因而对于上述的 x 的一切数值成立着不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这就证明了我们的断言, 只要当 a 是有限的数时取 $\delta = a - x'$ (因而不等式 $x > x'$ 可写成 $x > a - \delta$), 而当 $a = +\infty$ 时取 $\Delta = x'$.

若函数 $f(x)$ 不是上有界的, 则不论 E 是怎样的数, 可求得这样的 x', 使得 $f(x') > \mathrm{E}$; 于是对于 $x > x'$ 时, 更有 $f(x) > \mathrm{E}$, 等等.

当极限值 a 小于 x 的一切数值时的情形以及对于单调减的函数的情形, 让读者去改述这个定理.

显然, 第 **44** 段中关于单调变量 x_n 的定理是这一定理的特殊情形. 在这里标数 n 是自变量, 而具有聚点 $+\infty$ 的自然数序列 $\mathbb{N} = \{n\}$ 就是它的变域.

以后我们时常会遇到作为函数 $f(x)$ 的定义域的区域 $\mathscr{X}$ 是整个的区间 $[a', a)$, 其中 $a' < a$ 并且 a 是有限的数或 $+\infty$, 或者是区间 $(a, a']$, 其中 $a' > a$ 并且 a 是有限的数或 $-\infty$.

§4. 数 e

48. 数 e 看作序列的极限 我们在这里要利用极限的步骤来定义一个新的直到现在止尚未遇见过的数, 这一个数不论对于分析学本身或者对于它的应用来说, 都是非常重要的.

考虑变量

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

并设法应用第 **44** 段中的定理来确定它的极限.

因为在这里当指数 n 上升时幂的底数下降, 所以变量的 "单调" 性质不能直接看出来. 为要证实它的单调性, 我们根据二项式定理将它展开:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} \\
&\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

如果现在把 x_n 改为 x_{n+1}, 也就是把 n 加上 1, 则首先增加了新的第 $(n+2)$ 项 (正的), 已写出的 $n+1$ 项中的每个项也都增大了, 因为在括号内任一个 $1-\dfrac{s}{n}$ 型的因子都为更大的因子 $1-\dfrac{s}{n+1}$ 所代替. 由此可见

$$x_{n+1} > x_n,$$

即变量 x_n 是上升的.

现在来证明它又是上有界的. 在 (1) 式中去掉一切括号内的因子, 这样就增大了它, 因此

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

其次, (从第三个分数起) 把分母中的每个因子都换成数 2, 我们又增大了所得的式子, 因此也有

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

但是由第二项 $\frac{1}{2}$ 起的级数的总和小于 1, 所以 $y_n < 3$, 因而更加有 $x_n < 3$.

于是由第 **44** 段中的定理, 就推得变量 x_n 有有限的极限. 这个极限依欧拉的记法总用字母 e 表示. 因而我们有数

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

它的居首的 15 位十进小数就是

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045 \cdots.$$

虽然序列

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2; \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25; \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.3703 \cdots;$$
$$\cdots; \quad x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7048 \cdots; \quad \cdots$$

也收敛于数 e, 可是收敛得很慢, 利用它来进行数 e 的近似计算也不方便. 在下一段中我们要叙述简便的方法来计算它的近似值, 并顺便证明 e 是无理数.

49. 数 e 的近似计算法 回到等式 (1). 如果固定 k 并设 $n > k$, 弃去第 $(k+1)$ 项以后的一切项, 则得不等式

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

在这式中取 n 趋向于无穷大时的极限; 因为所有各括号内的极限都是 1, 所以我们得到:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

这一不等式对于任何的自然数 k 都成立. 因此, 我们有

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

由此显然可见 [根据第 **38** 段中定理 3)] 又有

$$\lim y_n = e.$$

就计算数 e 的近似值而言, 用变量 y_n 比用 x_n 便利得多, 我们来估计 y_n 接近于 e 的程度. 为了这目的, 我们先考虑任意一个在 y_n 后的值 $y_{n+m} (m = 1, 2, 3, \cdots)$ 与 y_n 本身之间的差, 得

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!}$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}.$$

若在括号 $\{\cdots\}$ 内把各个分母中所有的因子都换成 $n+2$, 则得到不等式

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\};$$

如果把括号内的和换为无穷级数, 那么不等式只有加强:

$$y_{n+m}-y_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

现在固定 n 不变而令 m 无限地增加, 于是变量 y_{n+m} (具有标号 m 的) 取一显然收敛于 e 的数值序列

$$y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+m}, \cdots,$$

所以, 取极限时就得到

$$e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

或最后, 得到

$$0<e-y_n<\frac{1}{n!n}①.$$

若用 θ 表示差 $e-y_n$ 与数 $\frac{1}{n!n}$ 之比 (它显然位于 0 与 1 之间), 则又可写成

$$e-y_n=\frac{\theta}{n!n}.$$

在这式中用 y_n 的展开式代入, 我们就得到一个重要的公式:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}, \tag{2}$$

它是计算数 e 的出发点. 弃去最后的一项 "余项", 并把其余的各项都换成其十进小数的近似值, 我们就得到 e 的一个近似值.

$$\begin{array}{r}
2.000\ 00\\
\frac{1}{2!}=0.500\ 00\\
\frac{1}{3!}=0.166\ 67-\\
\frac{1}{4!}=0.041\ 67-\\
\frac{1}{5!}=0.008\ 33+\\
\frac{1}{6!}=0.001\ 39-\\
\frac{1}{7!}=0.000\ 20-\\
\hline
2.718\ 26
\end{array}$$

利用公式 (2) 我们来计算 e, 譬如说, 准确到 $\frac{1}{10^4}$. 首先需要确定怎样选取数 n (它可由我们

①因为很容易验证 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$.

支配), 才能达到这个准确度.

逐次地计算阶乘的倒数 (参看附表), 我们看出, 当 $n=7$ 时公式 (2) 中的 "余项" 已经是

$$\frac{\theta}{n!n}=\frac{\theta}{7!7}<0.000\ 03,$$

因此, 弃去它时, 误差远小于所提出的限度. 我们就取 n 的这个值. 把其余各项都化为十进位小数, 在第五位小数上取近似值 (达到后备的准确度), 使得误差在绝对值上小于 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$. 我们把计算的结果列成一表. 与近似值并列的记号 (+ 或 −) 指示着修正数的符号, 要恢复准确的数值必须把修正数加上去.

于是, 我们看出了在弃去余项时修正数小于 $\frac{3}{10^5}$. 现在再计算取近似值时的舍入数 (连同它们的符号), 就不难理解, 对于所得的数 e 近似值的总修正数介于

$$-\frac{2}{10^5} \quad 与 \quad +\frac{3.5}{10^5}$$

之间. 因此数 e 本身包含在两小数

$$2.718\ 24 \quad 与 \quad 2.718\ 295$$

之间, 因而可令

$$e=2.718\ 2+_{0.0001}.$$

我们注意, 这同一个公式 (2) 也可用来证明 e 是无理数.

从反面来讨论, 试假定 e 等于有理分数 $\frac{m}{n}$; 于是, 若对于这个 n 写出公式 (2), 我们便有

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n} \quad (0<\theta<1).$$

用 $n!$ 乘这等式的两端, 约去除了末项以外的所有分母, 我们得到左端是整数, 而右端是整数带分数 $\frac{\theta}{n}$, 但这是不可能的, 所得的矛盾就证明了我们的断言.

50. 数 e 的基本公式 · 自然对数 在第 **48** 段中我们曾定义数 e 为依赖于自然数附标的变量的极限:

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

现在我们要建立更一般的结果

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}. \tag{4}$$

为此, 只要证明 [见第 **35** 段] 以下二关系式分别地成立:

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad 与 \quad \lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{4a}$$

这次我们要利用 "序列的语言" 所下的极限定义 [第 **32** 段].

若把极限 (3) 看作是 n 的函数的极限, 并用 "序列的语言" 来解释它, 则不论 $\{n_k\}$ 是怎样一个随着附标 k 增大至无穷的自然数的序列, 我们得到等式

$$\lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e. \tag{5}$$

现在设 x 取任何趋向于零的一序列的正值 $\{x_k\}$; 可以设所有的 $x_k<1$. 令 $n_k=E\left(\frac{1}{x_k}\right)$, 于是

$$n_k\leqslant\frac{1}{x_k}<n_k+1\quad\text{且}\quad n_k\to+\infty.$$

因为这时

$$\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

两边的式子可以改写成:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\dfrac{1}{n_k+1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

并且, 根据 (5),

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\to e,\ \text{同样}\ \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\to e,$$

同时, 显然有

$$1+\frac{1}{n_k}\to 1,\quad 1+\frac{1}{n_k+1}\to 1.$$

由此可见, 上述两个表达式趋向于公共的极限 e, 于是 [由第 **38** 段中的定理 3)] 夹在它们中间的表达式也趋向于 e:

$$\lim(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e.$$

因此关系式 (4a) 中的第一式已用 "序列的语言" 得到证明.

为了要证明其中第二式, 我们现在假定序列 $\{x_k\}$ 由负值组成, 并且趋向于零; 我们算作 $x_k>-1$. 如果令 $x_k=-y_k$, 则

$$1>y_k>0,\quad y_k\to 0.$$

显然,

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}}$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

因为根据所证, 最后表达式的第一个因子趋向于 e, 第二个因子显然有极限 1, 所以左边的表达式也趋向于 e, 公式 (4) 已完全证明.

数 e 的这个重要性质是它的一切应用的基础. 这一性质使得选 e 作为对数系统的底有特别的便利. 以 e 为底的对数叫做自然对数, 并用记号 ln 来表示它; 在许多理论的研究中专门用自然对数①.

还要提到的是, 以 10 为底的常用对数与自然对数之间的联系是由著名的公式

$$\log x = \ln x \cdot M$$

来表示的, 其中 M 是换底的模且等于

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0.434294\cdots;$$

要得到这个公式并不难, 只要在恒等式

$$x = e^{\ln x}$$

的两端取以 10 为底的对数即可.

§5. 收敛原理

51. 部分序列 设已给一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots x_{n'}, \cdots \tag{1}$$

除了它以外, 我们考虑任何一个从它选出的部分序列②

$$x_{n_1}, \quad x_{n_2}, \quad x_{n_3}, \cdots, \quad x_{n_k}, \cdots \tag{2}$$

其中 $\{n_k\}$ 是某一个上升的自然数的序列:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots, \tag{3}$$

①这种对数有时按照苏格兰数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550—1617) —— 对数的发明者 —— 的名字误称为纳皮尔对数. 纳皮尔自己未曾有过对数系统的底的概念, 因为他是在另一原理上独自特殊地建立了它们, 但他的对数相当于底数接近于 $\frac{1}{e}$ 的对数, 与他同时代的瑞士数学家比尔吉 (J. Bürgi, 1552—1632) 创立了底数接近于 e 的对数.

②通常也称其为子序列. —— 编者

在这里依次取全部自然数值的序号已不是 n, 而是 k; n_k 也成为 k 的函数, 取自然数的值, 并且当 k 上升时显然趋向于无穷大.

若序列 (1) 有确定的极限 a (有限的或不是有限的), 则部分序列 (2) 也有同样的极限. 若序列 (1) 没有确定的极限, 则对于任何部分序列而言, 极限还可能存在.

例如, 设 $x_n = (-1)^{n+1}$; 这个变量没有极限. 如果限制 n 只取奇数或偶数值而变动, 则部分序列

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \cdots, \quad x_{2k-1} = 1, \cdots$$

与

$$x_2 = -1, \quad x_4 = -1, \cdots, \quad x_{2k} = -1, \cdots$$

就分别地以数 1 与 -1 为它们的极限.

在序列 (1) 为无界的情形, 要部分序列 (2) 具有有界的极限有时是不可能的 [当序列 (1) 本身趋向于 $\pm\infty$ 时, 就是如此]. 反之, 对于有界的序列, 成立着下面的波尔查诺–魏尔斯特拉斯[①]的断言:

波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 从任何**有界的**序列 (1) 中总可以选出收敛于有限的极限的部分序列 (2).

(这种说法不致排除在所给的序列内有相等的数的可能性, 在应用上这是很方便的.)

证明 设全部的数 x_n 都在两界限 a 与 b 之间. 把区间 $[a, b]$ 分为两半, 则至少有一半包含有所给序列中的无穷多个元素, 因为, 如若不然, 则在整个区间 $[a, b]$ 内所包含的这种元素就会是有限多个, 但这是不可能的. 于是设 $[a_1, b_1]$ 是包含有无穷多个数 x_n 的那一半 (若两半都如此, 则取其中任一半).

同样, 从区间 $[a_1, b_1]$ 内根据条件分出它的一半 $[a_2, b_2]$, 使得在其内包含有无穷多个数 x_n, 等等. 继续这种步骤, 在第 k 次分出的它的区间 $[a_k, b_k]$ 内同样包含有无穷多个数 x_n; 如此无限地继续进行下去.

在所构成的这些区间中 (从第二个起), 每一个都包含在其前一个之内且为它的一半. 此外, 第 k 个区间的长度等于

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

它随着 k 的上升而趋向于零. 应用 [第 **46** 段] 关于区间套的引理, 我们肯定, a_k 与 b_k 趋向于一公共的极限 c.

现在我们可用下面的方法归纳地把部分序列 $\{x_{n_k}\}$ 造出来. 在我们的序列的元素 x_n 中取包含在 $[a_1, b_1]$ 内的任一个 (例如, 第一个) 作为 x_{n_1}. 在 x_{n_1} 后面的各元素 x_n 中取包含在 $[a_2, b_2]$ 内的任一个 (例如, 第一个) 作为 x_{n_2}, 等等. 一般地说, 在以前分出的 $x_{n_1}, x_{n_2} \cdots, x_{n_{k-1}}$ 后面的各元素 x_n 中取包含在 $[a_k, b_k]$ 内的任一个 (例

① 魏尔斯特拉斯 (1815—1897) 是卓越的德国的数学家.

如, 第一个) 作为 x_{n_k}. 这种依次进行选取元素的可能性, 是由每一区间 $[a_k, b_k]$ 包含有无穷多个数 x_n (即包含有序号可任意大的元素 x_n) 这个条件所决定的.

其次, 因为

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad 且 \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

所以由第 **38** 段的定理 3) 也有 $\lim x_{n_k} = c$, 这就是所要证明的.

在这断言的证明中应用了逐次等分所考虑的区间的方法, 它在其他情形中对我们也是常有用的.

波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理大大地简化了许多困难的定理的证明, 它已解决了这些论证的难点. 在以下的几段内我们要利用它.

52. 以自然数为变元的函数存在有限极限的条件 设已给变量 x_n, 它依次取一序列的数值 (1); 我们要对于这个变量 (或者对于序列也是一样) 来解决关于有限极限的存在性的一般判别法的问题. 要达到这个目的, 极限定义的本身是不能用的, 因为在定义中已提到这个极限, 而它的存在性就是还要讨论的问题. 我们所需要的判别法就只能应用我们已知的东西, 也就是变量的数值的序列 (1).

下面的著名定理解决了所提出的问题, 这个定理属于波尔查诺 (1817) 与柯西 (1821), 通常称它为*收敛原理*.

定理 *要变量 x_n 有有限的极限, 其必要且充分的条件是: 对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 存在这样的序号 N, 使得当 $n > N$ 与 $n' > N$ 时不等式*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \tag{4}$$

恒成立.

读者可看出, 这里问题在于要使变量的数值按照其序号的上升而*彼此*无限地接近. 我们来讲这定理的证明.

必要性 设变量 x_n 有确定的有限的极限, 譬如说是 a. 由极限的定义 [第 **28** 段], 不论 $\varepsilon > 0$ 是怎样的数, 对于数 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 可求得这样的序号 N, 使得当 $n > N$ 时恒有不等式

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在取任意两个序号 $n > N$ 与 $n' > N$; 对于这两序号同时有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 与 \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由此得

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n'}| &= |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \\ &\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

这样, 条件的必要性就证明了. 要证明它的充分性就难得多.

充分性 在这里我们正要应用前段的引理.

于是, 假定条件已成立, 且对于给定的 $\varepsilon > 0$ 找到了这样的序数 N, 使得对于 $n > N$ 与 $n' > N$ 有不等式 (4). 如果这时固定 n', 则把 (4) 式改写成

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon$$

时, 我们看出, 变量 x_n 在各种情形下是有界的: 它的数值当 $n > N$ 时都包含在数 $x_{n'} - \varepsilon$ 与 $x_{n'} + \varepsilon$ 之间, 并且不难放宽这两个界限, 使得这前面的 N 个数值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 也包含在它们的中间.

于是由波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理, 可以分出一个部分序列 $\{x_{n_k}\}$, 它收敛于有限的极限 c:

$$\lim x_{n_k} = c.$$

我们来证明变量 x_n 也趋向于这个极限. 可以选取这样大的 k, 使得

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon,$$

并且同时使得 $n_k > N$. 因此, 在 (4) 中可以取 $n' = n_k$ 而得

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

合并这两个不等式, 最后得到

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (当\ n > N),$$

这就证明了我们的断言①.

附注 虽然波尔查诺与柯西确立了由他们所发表的有限极限的存在条件的充分性, 可是没有严格的实数理论自然不能够证明它.

53. 任意变元的函数存在有限极限的条件 现在我们转过来考虑在一个以 a 为聚点的区域 $\mathscr{X} = \{x\}$ 内给定了函数 $f(x)$ 时的一般情形. 像在自然数变元的函数时一样, 可以建立同样的判别法以判定这个函数当 x 趋向于 a 时其有限的极限的存在性. 我们对 a 是有限的情形与对 $a = +\infty$ 的情形平行地来叙述这个判别法.

定理 *要函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时有有限的极限, 其必要且充分的条件是: 对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 存在有这样的数 $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$, 使得只要*

$$|x - a| < \delta \quad 与 \quad |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta\ 与\ x' > \Delta),$$

①数 2ε 像 ε 一样也可以 “任意小”. 如果愿意的话, 开始可以不取 ε 而取 $\frac{\varepsilon}{2}$, 于是在这里就会得到 ε, 以后读者会遇到类似的情形.

不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

就成立.

我们在 a 是有限的数的假定下来进行证明.

必要性 设存在着有限的极限

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

于是对于给定的 $\varepsilon > 0$, 可求得这样的 $\delta > 0$, 使得只要 $|x - a| < \delta$ 就有

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2};$$

又设 $|x' - a| < \delta$, 因而又有

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 在同时有

$$|x - a| < \delta \quad 与 \quad |x' - a| < \delta$$

的假设下, 我们得到

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

把问题化为已考虑过的情形, 充分性就可以建立起来. 在第 **32** 段中用 "序列的语言" 所表达的函数的极限概念的定义, 为我们开辟了建立这充分性的途径.

于是假定定理中所述的条件成立, 并且对于任意取的 $\varepsilon > 0$, 确定了对应的 $\delta > 0$.

若 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的任一收敛于 a 的数值序列, 则按序列极限的定义, 可求得这样的序号 N, 使得对于 $n > N$ 有: $|x_n - a| < \delta$. 除了 n 以外, 又取另一个序号 $n' > N$, 因而同时有

$$|x_n - a| < \delta \quad 与 \quad |x_{n'} - a| < \delta.$$

于是, 由数 δ 的选法, 有

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

这个不等式在两序号 n 与 n' 都大于 N 的唯一要求下是成立的. 这就是说, 第 **52** 段中的条件对于自然数变元 n 的函数 $f(x_n)$ 是成立的, 由此可见, 序列

$$f(x_1), \quad f(x_2), \cdots, \quad f(x_n), \cdots$$

有有限的极限, 譬如说是 A.

剩下尚要确定的是, 这个极限 A 不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的选法.

设 $\{x'_n\}$ 是另一个序列, 取自 $\mathscr{X}$ 中并且又收敛于 a. 对应于它的函数值序列 $\{f(x'_n)\}$, 根据所证, 有某一有限的极限 A'. 要证明 $A' = A$, 我们假设不是这样, 作 x 的数值的新序列

$$x_1, \quad x'_1, \quad x_2, \quad x'_2, \cdots \quad, x_n, \quad x'_n, \cdots,$$

它显然收敛于 a. 对应于它的函数值的序列

$$f(x_1),\quad f(x_1'),\quad f(x_2),\quad f(x_2'),\cdots,\quad f(x_n),\quad f(x_n'),\cdots$$

根本没有极限, 因为由它的奇位项或偶位项所组成的部分序列各趋向于不同的极限 [第 **51** 段]. 但这与已证明的事实矛盾. 可见当 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 确实趋向于有限的极限 A.

§6. 无穷小量与无穷大量的分类

54. 无穷小量的比较 假定在某种研究下要同时考虑一系列的无穷小量

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\cdots,$$

一般说来, 它们是同一个变量, 譬如说, x 的函数, x 趋向于有限的或无限的极限 a.

在许多情形中, 把这些被称为无穷小的量按照它们接近于零的性质互相作一比较, 是有趣的. 作为两无穷小量 α 与 β 的比较的基础的, 是它们的比的性态[①]. 为此我们建立下面两个定义:

I. 若比 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ (或者 $\dfrac{\alpha}{\beta}$) 有着有限的且异于零的极限, 则 α 与 β 算作是**同级的**无穷小量.

II. 若比 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 本身是无穷小量 (或者比 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 是无量大量), 则 β 算作是较无穷小量 α **更高级的**无穷小量, 而同时 α 是较无穷小量 β **更低级的**无穷小量.

例如, 若 $\alpha=x\to 0$, 则与这个无穷小量相比较, 下列诸无穷小量

$$\sin x,\quad \tan x,\quad \sqrt{1+x}-1$$

都是与它同级的无穷小量, 因为我们已经知道 [第 **34** 段, 5); 第 **43** 段, 6)]:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

反之, 无穷小量

$$1-\cos x,\quad \tan x-\sin x \tag{1}$$

显然是比 x 更高级的 [第 **43** 段, 7); (a) 与 (b)].

当然, 也可以遇到两无穷小量之比不趋向于任何的极限, 也不是无穷大量; 例如, 若取 [参看第 **34** 段, 6) 与 7)]

$$\alpha=x,\quad \beta=x\sin\frac{1}{x},$$

①我们假定用作除数的变量至少对于足够接近于 a 的 x 的数值不成为零.

则它们的比等于 $\sin\dfrac{1}{x}$, 当 $x\to 0$ 时此比并无极限. 在这种情形下, 我们说, 这两个无穷小量不能比较.

我们注意, 如果无穷小量 β 是比无穷小量 α 更高级的, 则这一事实就写成:

$$\beta = o(\alpha).$$

例如, 可以写

$$1-\cos x = o(x), \quad \tan x - \sin x = o(x), \quad 等等.$$

可见记号 $o(\alpha)$ 是比 α 更高级的无穷小量的一般记号. 今后我们将应用这种方便的记号.

55. 无穷小量的尺度 有时会遇到需要对无穷小量的性态作更精确的比较, 要用数字来表达它们的级. 在这情形下, 首先从所研究的各个无穷小量之内选出一个 (譬如说是 α) 作为 "标准", 称它为*基本无穷小量*. 当然, 基本无穷小量的选取在某种程度内是任意的, 但通常选取其中最简单的. 如果所要考虑的各量假定都是 x 的函数并且它们当 x 趋向于 a 时都成为无穷小, 则依 a 为零, 为异于零的有限数或为无穷大, 自然地分别选取

$$|x|, \quad |x-a|, \quad \frac{1}{|x|}$$

作为基本无穷小.

其次, 为了要评比性质更复杂的无穷小, 可由基本无穷小 α (我们认为 $\alpha > 0$) 的各种不同的正指数幂 α^k 组成一种尺度①.

III. *若 β 与 α^k $(k>0)$ 是同级的无穷小量*, 也就是说, 比 $\dfrac{\beta}{\alpha^k}$ 有异于零的有限的极限, *则 β 算作是 (关于基本无穷小 α 的) k 级的无穷小量.*

例如, 如果我们不满意前面所说的 "(1) 中两个无穷小 (当 $x\to 0$) 是比 x $(\alpha = x)$ 更高级的无穷小" 那一断言, 那么现在可以确切地说, (1) 式中前一个是关于 $\alpha = x$ 的二级无穷小, 而另一个是三级无穷小, 因为 [见第 **43** 段, 7), (a) 与 (b)]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

56. 等价的无穷小量 我们现在来讲同级无穷小中一种格外重要的特殊情形.

IV. *若 α 与 β 两无穷小的差 $\gamma = \beta - \alpha$ 是比 α 与 β 中任何一个更高级的无穷小:*

$$\gamma = o(\alpha) \quad 与 \quad \gamma = o(\beta),$$

*我们便称 α 与 β 是***等价的无穷小** *(记作 $\alpha \sim \beta$).*

可是, 这只要 γ 是比这两无穷小中之一更高级的无穷小就够了, 因为, 例如, 若

①不难看出, 当 $k>0$ 时 α^k 与 α 同为无穷小量.

γ 比 α 的级更高, 则它也比 β 的级更高. 事实上, 由 $\lim\dfrac{\gamma}{\alpha}=0$ 就推得

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}=\lim\frac{\dfrac{\gamma}{\alpha}}{1+\dfrac{\gamma}{\alpha}}=0.$$

考虑两个等价的无穷小 α 与 β, 于是 $\beta=\alpha+\gamma$, 其中 $\gamma=o(\alpha)$. *若近似地令* $\beta\approx\alpha$[①], *则 —— 当两个量都减小时 —— 不但由这替换所生的绝对误差* $|\gamma|$ *趋向于零, 而且相对误差* $\left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\right|$ *也趋向于零*. 换句话说, *当* α *与* β *的值充分小时, 可以令* $\beta=\alpha$ *而有着任意大的相对的准确度*. 在近似计算中, 复杂的无穷小可换为与它等价的简单的无穷小, 就是以此为根据的.

我们要建立一个有用的判定两无穷小的等价性的准则, 实质上它给出这个概念的第二个定义而与前面所给的定义是等价的:

为使两个无穷小量 α *与* β *是等价的, 其必要且充分条件是*

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

令 $\beta-\alpha=\gamma$, 我们有

$$\frac{\beta}{\alpha}-1=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

由此立即推得我们的断言. 实际上, 如果 $\dfrac{\beta}{\alpha}\to 1$, 则 $\dfrac{\gamma}{\alpha}\to 0$, 就是说, γ 是比 α 更高级的无穷小而 $\beta\sim\alpha$. 反之, 若给定 $\beta\sim\alpha$, 则 $\dfrac{\gamma}{\alpha}\to 0$, 于是 $\dfrac{\beta}{\alpha}\to 1$.

利用这个准则, 显然可见, 当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 是等价于 x 的无穷小, 而 $\sqrt{1+x}-1$ 等价于 $\dfrac{1}{2}x$. 由此得近似公式:

$$\sin x\approx x,\quad \sqrt{1+x}-1\approx\frac{1}{2}x.$$

已经证明的等价无穷小量的性质可以应用于确定 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式, 即应用于确定两无穷小量之比 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 的极限. 这时其中每一个量可用与它等价的任一无穷小量来代替而对于所求的极限毫无影响.

实际上, 若 $\bar{\alpha}\sim\alpha$ 且 $\bar{\beta}\sim\beta$, 即

$$\lim\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}=1\quad 且\quad \lim\frac{\beta}{\bar{\beta}}=1,$$

则比

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\bar{\beta}}\cdot\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\cdot\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

---

①符号 $\approx$ 表示近似的等式.

与比 $\dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ 仅相差两个各趋向于 1 的因子, 因而两者有相同的极限.

若能把 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 选得充分地简单, 则立即可以使问题大大地简化; 例如,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

从已证明的定理也能推出, 两个各与第三者等价的无穷小是彼此等价的.

57. 无穷小量的主部的分离 若已选定 α 为基本无穷小, 则形如 $c\cdot\alpha^k$ 的量自然要算作最简单的无穷小, 这里的 c 是常系数且 $k>0$. 设 β 是关于 α 的 k 级无穷小, 即

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c,$$

其中 c 是异于零的有限的数. 于是

$$\lim\frac{\beta}{c\alpha^k}=1,$$

而无穷小 β 与 $c\alpha^k$ 是等价的: $\beta\sim c\alpha^k$. 这个与所给的无穷小 β 等价的最简单的无穷小 $c\alpha^k$, 叫做 β 的**主部** (或**主项**).

利用上面所建立的结果, 除了已指出的简单例题以外, 不难分出下列表达式的主部:

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3.$$

这里 $x\to 0$, 并且 $\alpha=x$ 就是基本无穷小.

设 $\beta\sim c\alpha^k$, 即 $\beta=c\alpha^k+\gamma$, 其中 $\gamma=o(\alpha^k)$. 可以设想, 从无穷小 γ 可再分出主项: $\gamma=c'\alpha^{k'}+\delta$, 其中 $\delta=o(\alpha^{k'})(k'>k)$, 等等.

这种从无穷小中逐次分出其级数不断增高的最简单的无穷小的步骤, 可以继续进行.

在本节中我们只建立主部的一般概念, 仅用少数几个例题来说明它们. 以后对于刚才所说的关于已给无穷小量的主部的构造, 以及如何进一步从主部内再分出最简单的无穷小量, 我们还要指出系统的方法.

58. 应用问题 为了说明上述的思想, 我们举出两个应用问题.

1) 设用 l 米长的尺来测量地上一直线距离. 因为实际上没有把尺准确地沿着所测量的直线贴放, 所以测量的结果比真正的长度要大一些. 我们就测量时尺是曲折地放下的最坏的情形设想, 就是说, 测量时尺的两端轮流地偏在直线的两侧, 其与直线的距离为 λ m (图 25). 试估计其误差.

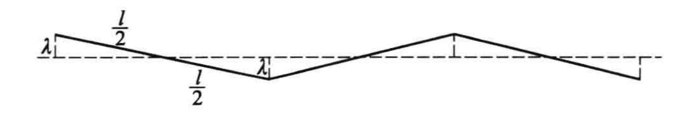


图 25

每放下一次尺所生的绝对误差等于尺的长度 l 与它在所测量的直线上的投影之差; 这投影是:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

把近似公式

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$$

应用于 $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ 的情形 (这是可以的, 因为量 λ 比 l 小得多), 我们可用

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}$$

来代替投影的表达式. 在这情形下上述的误差是 $\frac{2\lambda^2}{l}$, 而相对误差显然是 $\frac{2\lambda^2}{l^2}$. 这个相对误差即使在尺放下多次时也保持不变.

如果这误差的界限规定为 δ, 就是说, 应该有 $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, 则由此得 $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

例如, 当用 2 m 长的尺 ($l=2$) 测量时, 要达到 0.001 的相对准确度, 需要偏差 λ 不超过 $2\sqrt{0.0005}\approx 0.045$ m 或 4.5 cm.

2) 在划分地上的圆弧时下面的问题是有意义的: 试求圆弧 ABC 上的矢[①] $f=DB$ 与这弧的半弧 AB_1B 上的矢 $f_1=D_1B_1$ 之比 (图 26).

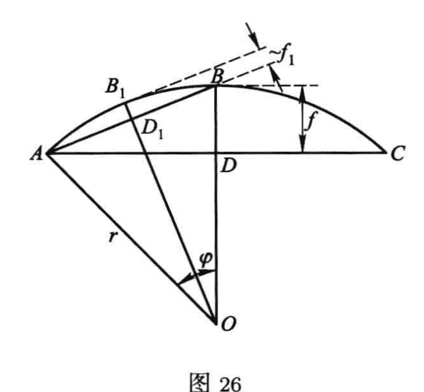


图 26

若令圆周的半径等于 γ,

$$\angle AOB=\varphi,\quad 则\quad \angle AOB_1=\frac{\varphi}{2}\quad 且$$

$$f=DB=r(1-\cos\varphi),\quad f_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

可见所求的比等于

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

① “矢” 的原文是 стрелка, 所谓 “矢” 在我国中学教材中相当于与圆弧相应的弓形的高. —— 编者注

这个表达式太复杂以至实际上应用起来很不方便. 我们来求当 $\varphi \to 0$ 时它的极限 (因为对于充分小的 φ 这表达式可以近似地用它的极限来替代), 为了这个目的, 我们把分子与分母分别用它们的主部来替代, 于是立即得到:

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2} = 4.$$

因此, 对于与不大的中心角相对应的弧, 我们可以近似地认为, 半弧的矢是弧的矢的四分之一. 这就使我们能够逐次地作出一个弧的一些中间的点, 只要已知原弧的两端及其中点就行了.

59. 无穷大量的分类 我们注意, 对于无穷大量可以有类似的分类法. 像在第 **54** 段一样, 我们把所考虑的各量当作是同一个变量 x 的函数, 当 x 趋向于 a 时它们都趋向于无穷大.

I. 两个无穷大量 y 与 z 算作是同级的量, 只要它们之比 $\frac{z}{y}\left(\text{或 } \frac{y}{z}\right)$ 具有异于零的有限的极限.

II. 若比式 $\frac{z}{y}$ 本身是无穷大 (或倒转过来 $\frac{y}{z}$ 是无穷小), 则 z 算作是较 y 更高级的无穷大量, 而同时 y 是较 z 更低级的无穷大量.

在比式 $\frac{z}{y}$ 不趋向于任何有限的极限且同时又不是无穷大的情形下, 无穷大 y 与 z 是不能比较的.

当同时考虑一系列的无穷大量时, 选取其中一个 (譬如说是 y) 作为基本无穷大, 而将其余各个无穷大与基本无穷大的各个幂作一比较. 例如, 若 (像我们在上面已假定一样) 它们全是 x 的函数且当 $x \to a$ 时都成为无穷大, 则当 $a = \pm\infty$ 时通常取 $|x|$ 作为基本无穷大, 而当 a 为有限值时取 $\frac{1}{|x-a|}$ 作为基本无穷大.

III. 若 z 与 y^k 是同级的无穷大, 也就是说, 比式 $\frac{z}{y^k}$ 有着异于零的有限的极限, 则无穷大 z 叫做 (**关于基本无穷大** y) 是 k 级的量.

第四章　一元连续函数

§1. 函数的连续性 (与间断点)

60. 函数在一点处的连续性的定义　与函数的极限概念密切相联系的是数学分析上另一个重要的概念, 即函数的连续性的概念. 以确切的形式建立起这一概念的, 是前面已提到的波尔查诺与柯西二人.

考虑在某一区间 $\mathscr{X}$ 中所定义的函数 $f(x)$, 并设 x_0 是这区间的一点, 因而在这点处函数有确定的数值 $f(x_0)$.

当我们建立 x 趋向于 x_0 时函数极限的

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

的概念时 [第 **32** 段与第 **33** 段], 我们曾一再地着重指出了, 变量 x 并不取数值 x_0; 这一个数值甚至可以不属于函数的定义域, 即使它属于函数的定义域, 但当建立上述的极限时数值 $f(x_0)$ 也是不考虑的.

可是特别要注意的正是

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

的情形. 如果这个关系式成立, 我们便说, 函数 $f(x)$ 对于数值 $x = x_0$ (或在点 $x = x_0$ 处) 是连续的; 如果它不成立, 我们就说, 函数对于这个数值 (或在这点处) **有一间断**[①].

①这一术语是与曲线的连续性和间断性的直观有联系的: 如果函数的图形是连续的, 则函数就是连续的, 函数的间断点对应于其图形的间断点, 可是事实上, 曲线的连续概念本身就需要论证, 而取得论证的最简单的方法恰又要通过函数的连续性!

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时 (显然也只有在这时), 要计算函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, x 本身趋向于 x_0 时是否也特别地取过这数值 x_0 是无关重要的.

函数的连续性的定义可以用其他的术语来叙述. 变量由数值 x_0 变到另一数值 x, 可以设想为数值 x_0 有了一个增量 $\Delta x = x - x_0$①. 函数的新值 $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ 与原值 $y_0 = f(x_0)$ 相差一个增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

要函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是连续的, 必须且只需它在这点处的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 同趋向于零. 换句话说, *连续函数的特征是: 当自变量的增量为无穷小时, 函数的对应增量也为无穷小.*

回转来看基本定义 (1), 我们来用 "序列的语言" [第 **32** 段] 揭示它所表达的内容. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的意义可归结如下: *不论*

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

是从 $\mathscr{X}$ 中取出的怎样一个收敛于 x_0 的数值 x 的序列, 对应的函数值序列

$$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$$

收敛于 $f(x_0)$.

最后, 函数的连续性可 "用 ε–δ 语言" [第 **33** 段] 表述如下: *不论对于怎样的数 $\varepsilon > 0$, 可求得这样的数 $\delta > 0$, 使得不等式*

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{引出不等式} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

由此可见, 最后这个不等式在点 x_0 的*充分小的*邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内应该成立.

我们注意, 要计算极限 (1), 只要 x 不超出区间 $\mathscr{X}$ 的范围, 可以让 x 从右边与左边来逼近于 x_0.

现在我们来建立在一已知点处函数的单侧连续性或单侧间断性这个概念.

我们说, *函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是***右 (左)** *连续的*, 只要下面的极限关系成立:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \\ {[f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)].} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

如果这两个关系式中的一个或另一个不成立, 则称 *$f(x)$ 在点 x_0 处分别有一***右***间断或***左***间断.*

对于在区间 $\mathscr{X}$ 的左 (右) 端② 函数有定义的那个端点而言, 显然只能谈到右 (左)连续性或间断性. 如果 x_0 是区间 $\mathscr{X}$ 的*内点*, 就是说它不与 $\mathscr{X}$ 的任一端点重

①在分析上 $x, y, t, \cdots$ 的增量用 $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \cdots$ 来表示. 这些记号必须看作整个的记号, 不可把 Δ 与 x 拆开, 余类推.

②假定这一端是有限的数.

合, 那么, 要想这一个表达着函数在点 x_0 处 (在通常意义下) 的连续性的等式 (1) 成立, 必须且只需 (2) 中两个等式同时成立 [第 **35** 段]. 换句话说, *函数在点 x_0 处具备连续性与它在这点处同时具有左右连续性是等价的*.

若一函数在区间 $\mathscr{X}$ 的每个点处是连续的, 我们就简称它在 $\mathscr{X}$ 内是连续的.

61. 单调函数的连续性条件 考虑在区间 $\mathscr{X}$ 内单调增 (减)[①] 的函数 [第 **47** 段]. 这个区间可以是有限的, 也可以是无限的, 可以是闭的, 也可以是半开的或开的. 我们现在要建立一种简单的判定法, 使我们能迅速地发现这一类型的函数在整个区间 $\mathscr{X}$ 内的连续性.

定理 *若当 x 在区间 $\mathscr{X}$ 内变动时单调增 (减) 函数 $f(x)$ 所取的数值集合包含在某一区间 $\mathscr{Y}$ 内并且***把** $\mathscr{Y}$ **全部填满**, *则函数 $f(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内是连续的*[②].

选取 $\mathscr{X}$ 内的任一点 x_0 并设它不是这区间的*右端*, 我们来证明函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是*右*连续的; 如果 x_0 不是所考虑的区间的左端, 则函数在点 x_0 处的*左*连续性也同样地可以证明, 于是综合起来就得到定理中的结论.

点 $y_0 = f(x_0)$ 属于区间 $\mathscr{Y}$, 不是它的右端 [因为在 $\mathscr{X}$ 内数值 $x > x_0$ 时在 $\mathscr{Y}$ 内的对应数值 $y = f(x) > y_0$]. 设 ε 是任意小的正数; 并且假定它小到这种程度, 使得数值 $y_1 = y_0 + \varepsilon$ 也属于区间 $\mathscr{Y}$. 因为由假设 $\mathscr{Y} = \{f(x)\}$, 所以在 $\mathscr{X}$ 内可求得一数值 x_1, 使有

$$f(x_1) = y_1,$$

并且显然有 $x_1 > x_0$ (因为当 $x \leqslant x_0$ 时就有 $f(x) \leqslant y_0$). 令 $\delta = x_1 - x_0$, 于是 $x_1 = x_0 + \delta$. 如果现在

$$0 < x - x_0 < \delta, \quad 亦即 \quad x_0 < x < x_1,$$

则

$$y_0 < f(x) < y_1 = y_0 + \varepsilon \quad 或者 \quad 0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

这就是说

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

也就是说, 函数 $f(x)$ 确实在点 x_0 处是右连续的, 这就是所要证明的. 图 27 可作为所引进的论证的解释.

62. 连续函数的算术运算 在讲述连续函数的*例子*以前, 我们先建立下面的简单命题, 它能很容易地扩大连续函数的数目.

---

① 为了明确起见我们假定函数是在*狭义下*单调增的 (虽然对于在广义下的单调函数定理也是正确的).

② 以后 [第 **70** 段中] 我们要证明这里所叙述的单调函数的连续性的*充分*条件也是*必要*条件.

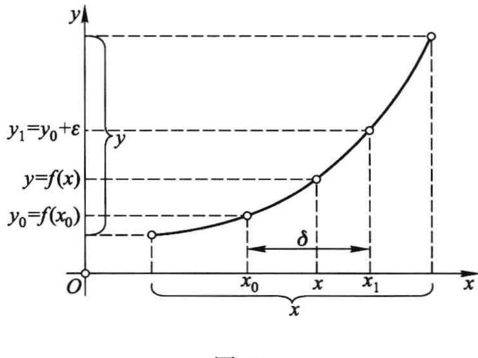


图 27

定理 若两函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义在同一区间 $\mathscr{X}$ 内并且都在点 x_0 处是连续的, 则在这点处下列各函数也是连续的:

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(最后这个函数应具备 $g(x_0) \neq 0$ 的条件).

这个定理可从各有极限的两函数的和、差、积与商的极限定理 [第 **42** 段] 直接推出来.

我们只讲述两函数之商的情形作为例子. 两函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续的假设与具备等式

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

是等价的. 于是根据关于商的极限定理 (因为分母的极限不为零) 有:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

而这一等式乃表示函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处是连续的.

63. 初等函数的连续性 1° 有理整函数与有理分式函数. 当 x 的函数是常数或是 x 自身时, 它的连续性是很明显的. 于是根据前段的定理就推得作为连续函数之积的任何一个单项式

$$ax^m = a \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{m \text{ 次}}$$

的连续性, 然后又推得作为连续函数之和的多项式 (整有理函数)

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

的连续性. 在上述各情形下函数的连续性在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 内都成立.

最后, 两多项式之商 (有理分式函数)

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

显然也对于 x 的每个数值是连续的, 但要除掉使分母为零的那些数值.

根据第 **61** 段的定理我们可建立其余各初等函数的连续性.

2° 指数函数 $y = a^x (a > 1)$. 当 x 在区间 $\mathscr{X} = (-\infty, +\infty)$ 内变动时指数函数是单调增的. 它的数值是正的并且填满整个区间 $\mathscr{Y} = (0 + \infty)$; 这可从对数 $x = \log_a y$ 对于任何的 $y > 0$ 的存在性 [第 **12** 段] 看出来. 因此, 指数函数对于 x 的任何数值是连续的.

3° 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$. 在 $a > 1$ 的限制下, 我们看出, 当 x 在区间 $\mathscr{X} = (0, +\infty)$ 内变动时这个函数是增函数. 并且, 它显然取到区间 $\mathscr{Y} = (-\infty, +\infty)$ 内的任何数值 y, 也就是满足 $x = a^y$ 的 y 的全部数值. 由此推得它的连续性.

4° 幂函数 $y = x^\mu (\mu \gtrless 0)$. 当 x 由 0 上升到 $+\infty$ 时, 若 $\mu > 0$, 则它递增, 若 $\mu < 0$, 则它递减, 这时它具有任何正的数值 y (当 $x = y^{\frac{1}{\mu}}$ 时), 因此它也是连续的①.

5° 三角函数:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x,$$
$$y = \sec x, \quad y = \csc x.$$

我们首先讲述函数 $y = \sin x$. 譬如说, 当 x 在区间 $\mathscr{X} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变动时它的连续性可从它在这区间上的单调性以及它可取到 -1 与 1 之间的每个数值的事实 (几何上确立的事实) 推出来. 就任意的形如

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

的区间而言, 也有同样的结果. 最后我们看出, 函数 $y = \sin x$ 对于 x 的一切数值是连续的. 同样也可建立函数 $y = \cos x$ 对于 x 的任何数值的连续性.

于是根据前段的定理就推得函数

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

的连续性. 对于前两个函数而言, 使 $\cos x$ 为零的那种数值 $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 需要除开, 而对于后两个函数而言, 使 $\sin x$ 为零的那种数值 $k\pi$ 需要除开.

最后我们要提到

---

①若 $\mu > 0$, 则要把零值加入到 x 的变动区间内与 y 的变动区间内; 当 $\mu < 0$ 时, 则零值不能加入. 其次, 若 μ 是整数 $\pm n$ 或者是分母为奇数的分数 $\pm\frac{p}{q}$, 则当 $x < 0$ 时也可以讨论幂函数 x^μ; 它对于这些数值的连续性同样地可建立起来.

6° 反三角函数:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x.$$

前两个函数在区间 $[-1,1]$ 上是连续的, 而后两个函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的. 其证明让读者去完成.

于是可以概括起来说, 基本初等函数在它们具有意义的所有一切点处, 即在它们的自然定义域内, 都是连续的.

64. 连续函数的叠置 把已知的连续函数叠置起来可以构造出许多种类的连续函数. 这是以下面的定理作其基础的.

定理 设函数 $\varphi(y)$ 是在区间 $\mathscr{Y}$ 内定义的, 而函数 $f(x)$ 是在区间 $\mathscr{X}$ 内定义的, 并且当 x 在 $\mathscr{X}$ 内变动时后一函数的数值不超出 $\mathscr{Y}$ 的范围. 如果 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内的点 x_0 处是连续的, 而 $\varphi(y)$ 在 $\mathscr{Y}$ 内的**对应点** $y_0 = f(x_0)$ 处是连续的, 则复合函数 $\varphi(f(x))$ 在点 x_0 处是连续的.

证明 给定任一数 $\varepsilon > 0$. 因为 $\varphi(y)$ 在 $y = y_0$ 处是连续的, 所以对于 ε 可求得这样的 $\sigma > 0$, 使得

$$\text{由 } |y - y_0| < \sigma \text{ 推得 } |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

另一方面, 根据 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的连续性, 对于 σ 可求得这样的 $\delta > 0$, 使得

$$\text{由 } |x - x_0| < \delta \text{ 推得 } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma.$$

依照所选取的数 σ, 由此又推得

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon.$$

于是函数 $\varphi(f(x))$ 在点 x_0 处的连续性已用 "ε–δ 语言" 证明.

例如, 若把幂函数 $x^\mu (x > 0)$ 表成如下形的函数

$$x^\mu = e^{\mu \ln x},$$

它是由对数函数与指数函数的叠置得来的, 则由后两函数的连续性就已推得幂函数的连续性.

65. 几个极限的计算 函数的连续性在计算极限时可以多方面来利用[①]. 在这里我们根据初等函数的连续性来建立几个在下一章所需要的重要的极限:

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \quad \left(\dfrac{0}{0}\right),$

[①] 事实上, 我们以前有时就这样做过; 如在第 **43** 段例 6) 中我们顺便建立了函数 $\sqrt{x}$ 在 $x = 1$ 处的连续性并已利用了它, 而在例 7) (b) 中同样地利用了 $\cos x$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \ln a \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$,

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha} = \mu \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

我们有

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

因为右端在对数符号下的式子当 $\alpha \to 0$ 时趋向于 e [第 **50** 段, (4)], 所以 (由对数函数的连续性) 它的对数趋向于 $\log_a e$, 这就是所要证明的.

我们要注意已证明的公式的特例, 即当所指的是自然对数时 $(a=e)$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

自然对数制所表现出来的优点实际上根源于这一结果的简便.

回到公式 2), 我们令 $a^{\alpha}-1=\beta$; 于是当 $\alpha \to 0$ 时 (由指数函数的连续性) 也有 $\beta \to 0$. 其次, 我们有 $\alpha = \log_a(1+\beta)$, 因此, 如果利用已经证明的结果就得

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$

这就是所要证明的.

特别, 若取 $\alpha = \dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则得到有趣的公式:

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a \quad (\infty \cdot 0).$$

最后, 为要证明公式 3), 我们令 $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$; 当 $\alpha \to 0$ 时 (由幂函数的连续性) 也有 $\beta \to 0$. 在等式 $(1+\alpha)^{\mu} = 1+\beta$ 两端取对数, 得到

$$\mu \cdot \ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta).$$

利用这一关系式, 我们可把所给的表达式变形为:

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \mu \cdot \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

根据已证结果, 两个比值

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \quad 与 \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

都趋向于 1, 因而整个乘积以 μ 为其极限, 这就是所要证明的.

于是在第 **43** 段, 6) 中所已考虑过的极限可作为 $\mu = \dfrac{1}{2}$ 时的特例而得到.

66. 幂指数表达式 我们现在来考察幂指数表达式 u^v, 其中 u 与 v 是同一个变量 x 的函数, x 的变域 $\mathscr{X}$ 具有聚点 x_0; 特别地, 它们可以是两个以自然数为变元的函数 u_n 与 v_n.

设存在着有限的极限:

$$\lim_{x\to x_0} u = a \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0} v = b,$$

并且 $a > 0$. 试求表达式 u^v 的极限.

把这表达式写成下形:

$$u^v = e^{v\cdot\ln u};$$

函数 v 与 $\ln u$ 具有极限

$$\lim_{x\to x_0} v = b, \quad \lim_{x\to x_0} \ln u = \ln a$$

(在这里利用了对数函数的连续性), 因而

$$\lim_{x\to x_0} v\cdot\ln u = b\cdot\ln a.$$

由此 —— 根据指数函数的连续性 —— 最后得到

$$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{b\cdot\ln a} = a^b.$$

表达式 u^v 的极限也可在已知乘积 $v\cdot\ln u$ 的极限 c (有限的或无穷的) 的其他各情形下确立起来. 当 c 为有限值时所求的极限显然是 e^c; 如果 $c = -\infty$ 或 $+\infty$, 则这极限分别为 0 或 $+\infty$ [第 **34** 段, 2].

只由给定的极限 a 与 b 来确定极限 $c = \lim\{v\cdot\ln u\}$ 的本身, 这总是可能的, 但要除开这个乘积当 $x\to x_0$ 时成为 $0\cdot\infty$ 型的未定式的那些情形. 不难理解, 例外的几种情形对应于数值 a 与 b 的如下的几种结合:

$$a = 1, \quad b = \pm\infty;$$

$$a = 0, \quad b = 0;$$

$$a = +\infty, \quad b = 0.$$

在这些情形下 (视出现的情形而定) 称表达式 u^v 表示 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型的未定式①. 这时要想解决表达式 u^v 的极限问题, 只知道函数 u 与 v 的极限是不够的, 而必须直接研究它们趋向于其自身的极限时的规律.

表达式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 于 $n\to\infty$ 时, 或者更一般的表达式 $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 于 $\alpha\to 0$ 时, 具有极限 e, 它给出一个 1^∞ 型的未定式的例子.

我们曾经指出, 确定各个类型未定式的数值的一般方法将于第七章 §3 中去讲.

①关于这些记号可以重述一遍 §41 末的脚注.

67. 间断点的分类 · 例子 我们要详细讲述函数在点 x_0 处的右连续性与右间断的问题. 假定函数 $f(x)$ 在这点的右边某一区间 $[x_0, x_0+h](h>0)$ 内有定义, 我们知道, 要函数具备连续性必须且只需: 第一, 当 x 从右边趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的有限的极限 $f(x_0+0)$ 要存在; 第二, 这个极限要等于函数在点 x_0 处的值 $f(x_0)$.

因此, 不难回答这样一个问题: 在何种情况下在点 x_0 处出现函数 $f(x)$ 的*右间断点*. 可以遇到这种情形, 虽然有限的极限 $f(x_0+0)$ 存在, 但它并不等于数值 $f(x_0)$; 这种间断点叫做*普通的*或者*第一类的间断点*[①]. 但也可能遇到极限 $f(x_0+0)$ 是无穷大或者根本不存在的情形; 这时我们称这间断点是*第二类的间断点*.

若函数 $f(x)$ 只在区间 $(x_0, x_0+h]$ 内是有定义的, 但存在着有限的极限

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

则只要令 $f(x_0)$ 等于这个极限作为函数在点 x_0 处的*补充定义*, 函数就在点 x_0 处是右连续的. *今后遇到这种情形我们所指的常常是这种意义*. 可是, 如果函数在 x_0 的左边 —— 在区间 $[x_0-h, x_0]$ 内也是有定义的, 并且存在着有限的极限

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

则只在左右两极限相同的条件下才能恢复函数在点 x_0 处的连续性.

最后, 若在区间 $(x_0, x_0+h]$ 内所定义的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限不存在, 则在点 x_0 处函数即使是完全未定义的, 我们称它在这点处有*第二类的右间断点*: 在这情形下, 无论怎样补充函数在点 x_0 处的定义, 它不可避免地在这点处有一间断!

例 1) 考察函数 $y=E(x)$ (其图像在图 5 中已表出). 若 x_0 不是整数并且 $E(x_0)=m$, 即 $m<x_0<m+1$, 则对于在区间 $(m, m+1)$ 内的 x 的一切数值有 $E(x)=m$, 因而函数在点 x_0 处的连续性是很明显的.

另一种情形是, 若 x_0 等于整数 m, 则函数在这点处是右连续的, 因为在 $x_0=m$ 的右边 [也就是对于 $(m, m+1)$ 内的 x 值] 有 $E(x)=m$, 于是也有 $E(m+0)=m=E(m)$. 反之, 在 $x_0=m$ 的左边 [也就是对于 $(m-1, m)$ 内的 x 值] 显然有 $E(x)=m-1$; 于是又有 $E(m-0)=m-1$, 它不等于数值 $E(m)$, 而在点 $x_0=m$ 的左边函数有普通的间断或跃度!

2) 就函数

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \quad (\text{当 } x\neq 0)$$

而言, 点 $x=0$ 是第二类的左右两边的间断点; 就是说, 在这点处函数从左边与从右边都趋向于无穷大:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^3}=+\infty. \quad f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^3}=-\infty.$$

3) 在第 **34** 段, 6) 中已考察过的函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0)$$

在点 $x=0$ 处有第二类的两边间断点, 因为这函数在所说的点处左右极限根本都不存在.

---

①在这情形下我们也说, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右边有一*跃度*, 其数量等于 $f(x_0+0)-f(x_0)$.

4) 反之, 若取函数 [第 **34** 段, 7)]

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

它的极限我们已知道存在:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

则令 $f(0) = 0$ 时我们就又恢复了函数于 $x = 0$ 时的连续性.

5) 最后, 我们用两等式

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}}\,(a > 1), \quad f_2(x) = \arctan\frac{1}{x}$$

(其中 $x \neq 0$) 来定义两个函数并附加条件

$$f_1(0) = f_2(0) = 0.$$

像在第 **35** 段中一样, 我们已看到

$$f_1(+0) = +\infty, \quad f_1(-0) = 0,$$
$$f_2(+0) = \frac{\pi}{2}, \quad f_2(-0) = -\frac{\pi}{2}.$$

由此可见, 在点 $x = 0$ 处第一个函数有第二类的右间断点, 然而是左连续的; 第二个函数在 $x = 0$ 处左右两边都有跃度 [参看图 22 与 23].

我们最后讲到时常要考虑的重要的一类函数 —— 单调的或者分段单调的[①] —— 并证明对于这类的函数只可能有普通的间断点出现. 这可从这种函数 $f(x)$ 在其定义区间 $\mathscr{X}$ 内的每一点 x_0 处总有有限的极限 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ (如果 x_0 是区间 $\mathscr{X}$ 的一个端点, 则只有此两极限中的一个) 这一事实推出来. 例如, 设函数 $f(x)$ 单调递增, 并且 x_0 不是区间 $\mathscr{X}$ 的左端; 于是当 $x < x_0$ 时函数 $f(x)$ 的数值以数 $f(x_0)$ 为上界, 而由第 **47** 段的定理有限的极限

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

确实地存在.

§2. 连续函数的性质

68. 关于函数取零值的定理 我们现在要研究在某一区间内连续函数的基本性质. 这些性质本身是有趣的, 且在以后的叙述中时常要引用它们作为各种论断的根据.

波尔查诺 (1817) 最先开辟了这些性质的严格论证的道路, 继之者则是柯西 (1821). 下面引用的重要定理就是他们的.

---

① 如果函数的定义区间可以分成有限多个部分区间, 使在每一部分区间内函数分别是单调的, 则称函数是分段单调的.

波尔查诺 – 柯西第一定理 设函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上定义的并且是连续的, 又在这区间的两端处取**异号的**数值, 则在 a 与 b 之间必可求得一点 c, 使在这点处函数成为零:

$$f(c)=0 \quad (a<c<b).$$

这个定理有着很简单的几何意义: 若连续曲线从 x 轴的一侧转移到另一侧, 则它与这轴必相交 (图 28).

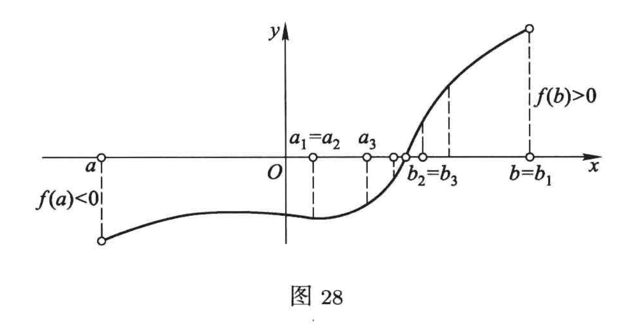


图 28

我们用细分区间的方法来进行证明 [第 **51** 段]. 为确定起见, 我们假定 $f(a)<0$ 而 $f(b)>0$. 用点 $\dfrac{a+b}{2}$ 把区间 $[a,b]$ 分成两半. 可能遇到函数 $f(x)$ 在这点处等于零, 于是可以令 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 而定理就已证明. 设 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$; 于是函数必在区间 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 或 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 的两端处取异号的数值 (并且负值在左端而正值在右端). 用 $[a_1,b_1]$ 来表示这个区间, 我们有:

$$f(a_1)<0, \quad f(b_1)>0.$$

再把区间 $[a_1,b_1]$ 平分成两半并除开 $f(x)$ 在这区间的分点 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 处为零的情形, 因为在这情形下定理已告证明. 用 $[a_2,b_2]$ 表示使

$$f(a_2)<0, \quad f(b_2)>0$$

的那半个区间.

继续进行这种构造区间的步骤. 这时, 或者在有限多个步骤以后我们会遇到在作为分点的一点上函数等于零 —— 而定理的证明就告完成, 或者我们得到一个套在另一个内的区间的无穷序列. 我们来讨论后一情形. 这时对于第 n 个区间 $[a_n,b_n](n=1,2,3,\cdots)$ 我们有

$$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0, \tag{1}$$

并且它们的长度显然等于

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}. \tag{2}$$

所作出的区间序列满足区间套的引理 [第 **46** 段], 因为根据 (2) 有 $\lim(b_n - a_n) = 0$; 所以两变量 a_n 与 b_n 趋向于共同的极限

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

而 c 明显地属于 $[a, b]$ [第 **36** 段, 3)]. 我们来证明这个点 c 满足定理的要求.

在不等式 (1) 中取极限同时利用函数的连续性 (特别是在点 c 处的连续性), 我们同时得到

$$f(c) = \lim f(a_n) \leqslant 0 \quad 与 \quad f(c) = \lim f(b_n) \geqslant 0,$$

所以实际上是 $f(c) = 0$. 定理已被证明.

我们要注意, 函数在闭区间 $[a, b]$ 上的*连续性*的要求是极重要的: 即使是具有一个间断点的函数也能够由负值变到正值而不变为零. 例如, $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$ 就是这样的一个函数, 虽然 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 而 $f(1) = \frac{1}{2}$ (在 $x = 1$ 处有跃度), 可是它到处都不等于零.

69. 应用于解方程 前面已证明的定理在解方程上有其应用.

例如, 考虑实系数的奇次代数方程

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

对于绝对值充分大的那种 x 的数值, 多项式的符号与其最高次项的符号相同, 也就是说, 当 x 为正时它与 a_0 同号, 而当 x 为负时它与 a_0 异号. 因为多项式是连续函数, 所以它既然变号就必定在区间内某一点处等于零. 因此: *任何实系数的奇次代数方程至少有一个实根*.

波尔查诺 – 柯西定理不仅可以用来确定根的存在性, 而且可以用来计算根的近似值 (这也是柯西在证明他登载在《论方程的数值解》一文中的定理时的出发点). 我们用例子来说明这种应用. 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 因为 $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, 所以多项式在 1 与 2 之间有根. 用点 1.1; 1.2; 1.3; $\cdots$ 把这区间 $[1, 2]$ 分成 10 等份并逐次地来计算:

$$f(1.1) = -0.63\cdots; \quad f(1.2) = -0.12\cdots; \quad f(1.3) = +0.55; \cdots$$

我们看出, 在 1.2 与 1.3 之间包含有根. 再把这个区间分成 10 等份, 我们求得:

$$f(1.21) = -0.06\cdots; \quad f(1.22) = -0.04\cdots; \quad f(1.23) = +0.058; \cdots$$

现在很明显, 这根落在 1.22 与 1.23 之间; 于是已经知道根的数值的准确度达到 0.01, 余仿此[①].

①可是, 这种方法由于需要太多的计算实际上是不方便的; 能更快地达到目的的方法是存在的 (在微分学中再去讲述).

70. 关于中间值的定理 在第 **69** 段中已证明的定理可以直接推广如下:

波尔查诺 – 柯西第二定理 设在闭区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 是有定义的并且是连续的, 又在这区间的两端点处函数取不同的数值

$$f(a)=A \quad 与 \quad f(b)=B.$$

于是, 不论 C 是 A 与 B 之间的怎样一个数, 总可求得 a 与 b 之间的一个点 c, 使得

$$f(c)=C^{①}.$$

证明 为确定起见, 我们算作

$$A<B, \quad 因而 \quad A<C<B.$$

考虑在区间 $[a,b]$ 上的一个辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-C$. 这函数在这区间上是连续的并且在它的两端点处取不同的符号:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0, \quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

于是由第一定理, 在 a 与 b 之间可求得一点, c, 使得 $\varphi(c)=0$, 即

$$f(c)-C=0 \quad 或 \quad f(c)=C,$$

这就是所要证明的.

由此我们已建立了在区间内连续的函数 $f(x)$ 的重要性质: 当函数从一个数值变到另一个数值时, 它至少要经过每一个中间值一次.

这个性质, 骤然看来, 好像揭露了函数的连续性的实质. 可是不难作出一些也具有这种性质但显然是不连续的函数. 例如, 函数 [第 **67** 段, 3)]

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0), \quad f(0)=0$$

在任何含有间断点 $x=0$ 的区间内总可取得由 -1 到 $+1$ 所有一切可能的值②.

从已证明的连续函数的性质得出 (本质上与它等价的) 这样的一个推论:

推论 若函数 $f(x)$ 在任何区间 $\mathscr{X}$ (闭的或非闭的, 有限的或无穷的) 上是有定义的并且是连续的, 则它所取得的数值也完全充满着某一区间.

用 $\mathscr{Y}$ 表示函数值的集 $\{f(x)\}$. 设

$$m=\inf\mathscr{Y}, \quad M=\sup\mathscr{Y}^{③}$$

①显然, 波尔查诺 – 柯西第一定理是这定理的特例: 若 A 与 B 异号, 则可以取零值作为 C.

②无怪乎波尔查诺还着重指出了, 所说的这个性质是连续性的一个结果, 但绝不能把它当作连续性定义的基础.

③提醒读者, 如果集 $\mathscr{Y}$ 不是有上 (下) 界的, 则我们已在第 **6** 段中规定令 $\sup\mathscr{Y}=+\infty$ $(\inf\mathscr{Y}=-\infty)$.

并且 l 是 m 与 M 之间的任一数:

$$m < l < M.$$

于是一定可求得函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ (x_1 与 x_2 取自区间 $\mathscr{X}$ 内) 使得

$$m \leqslant f(x_1) < l < f(x_2) \leqslant M;$$

这可由数集的确界定义推出来. 但由已证明的定理在 x_1 与 x_2 之间存在有这样的数值 $x = x_0$ (它显然也属于 $\mathscr{X}$), 使得 $f(x_0)$ 恰好等于 l; 因此, 这个数值在集 $\mathscr{X}$ 内.

由此可见, $\mathscr{X}$ 本身是一个以 m 与 M 为端点的区间 (两端点本身可否属于区间要看情形来决定; 参考第 **73** 段).

在第 **61** 段内我们已看出, 在单调函数的情形下刚才所述的函数的性质引出了它的连续性质. 但不是一般情形下都如此, 上面所举的例子就说明了这一点.

附注 就所考虑的函数是整多项式的特殊情形来说, 上面两个定理早在未得其一般形式的严格证明以前就发表了. 例如, 在欧拉的《分析引论》中我们可找到 (就整多项式说) 本段中所述定理的完全陈述, 但没有可靠的论证; 这一定理后来被应用到解决代数方程的实根存在问题 [参看第 **69** 段][1]. 欧拉和其他作者一样有时也利用了几何的见解. 最后, 我们还要提到, 拉格朗日[2] 曾直接从第 **68** 段中以因式分解为基础的定理 (就多项式而言!) 的解析证明出发, 撰写了《关于各种次数的数字方程的解法的论文》.

71. 反函数的存在性 应用前段中已研究过的连续函数性质我们来确定在某些假设下单值反函数的存在性与连续性 [参看第 **23** 段].

定理 设在某一区间 $\mathscr{X}$ 内函数 $y = f(x)$ 是确定的, 单调增 (减)[3] 并且是连续的. 于是在这函数的数值的对应区间 $\mathscr{Y}$ 内存在有**单值**反函数 $x = g(y)$, 它也是单调增 (减) 的并且是连续的.

证明 我们只就增函数的情形来讨论. 在前面我们已看出 [参看前面的推论], 连续函数的数值 $f(x)$ 充满着某一个区间 $\mathscr{Y}$, 因而对于这个区间的每个数值 y_0 至少可求到 ($\mathscr{X}$ 中) 一个这样的数值 x_0, 使得

$$f(x_0) = y_0.$$

但由这函数的单调性这样的数值只能有一个: 如果 x 大于或小于 x_0, 则 $f(x)$ 也对应地大于或小于 $f(x_0)$.

把这个数值 x_0 与在 $\mathscr{Y}$ 中任意取的 y_0 相对应, 我们得到单值函数

$$x = g(y),$$

[1] 俄文版第 44–46 页 (参看第 **21** 段中的脚注).
[2] 拉格朗日 (1736—1813) 是法国的大数学家兼力学家.
[3] 这里是指狭义的单调增 (减) (在这里这是很重要的).

它是函数 $y=f(x)$ 的反函数.

不难指出, 这个函数 $g(y)$ 也像 $f(x)$ 一样单调增. 设

$$y'<y'' \quad 与 \quad x'=g(y'), \quad x''=g(y'');$$

于是由函数 $g(y)$ 的定义同时有

$$y'=f(x') \quad 与 \quad y''=f(x'').$$

假若 $x'>x''$, 则根据函数 $f(x)$ 的单调增也会有 $y'>y''$, 但这与条件相矛盾. 也不能有 $x'=x''$, 因为如果这样, 那就也会有 $y'=y''$, 这也与条件相矛盾. 由此可见, 只能有不等式 $x'<x''$, 所以 $g(y)$ 确实是增函数.

最后, 要证明函数 $x=g(y)$ 的连续性, 只要引证第 **61** 段中的定理, 这定理中的条件现在是满足的: 所说的函数是单调的并且它的数值显然充满着区间 $\mathscr{X}$①.

利用已证明的定理可以重新建立许多我们已知道的结果.

例如, 如果把这定理应用于定义在区间 $\mathscr{X}=[0,+\infty)$ 的函数 x^n (n 是自然数), 则得到

$$x=\sqrt[n]{y} \quad (y \text{ 在 } \mathscr{Y}=[0,+\infty))$$

的算术根的存在性与连续性.

72. 关于函数的有界性的定理 若函数 $f(x)$ 对于某一有限的区间内所有 x 的数值是确定的 (因此, 它取有限的数值), 我们还不能推出函数必须是有界的, 即不能推出函数所取的数值的集合 $\{f(x)\}$ 是有界的. 例如, 设 $f(x)$ 是这样定义的:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad 当\ 0<x\leqslant 1, \quad 并且 \quad f(0)=0;$$

这函数只取有限的数值, 但它是无界的, 因为当 x 逼近于零时它可取得任意大的数值. 顺便指出, 在半开区间 $(0,1]$ 内它是连续的, 但在 $x=0$ 处有一间断.

对于在闭区间上连续的函数情形却有所不同.

魏尔斯特拉斯第一定理 若函数 $f(x)$ 在**闭**区间 $[a,b]$ 上是确定的并且是连续的, 则它是有上下界的, 就是说, 存在有这样两个有限的常数 m 与 M, 使得 $a\leqslant x\leqslant b$ 时有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

证明 从反面来进行: 假定当 x 在区间 $[a,b]$ 上变化时函数 $f(x)$ 是无界的, 譬如说, 无上界.

在这情形下对于每一个自然数 n 可在区间 $[a,b]$ 上求得这样一个数值 $x=x_n$, 使得

$$f(x_n)\geqslant n. \tag{3}$$

①不论从 $\mathscr{X}$ 内取怎样的 x, 只要令 $y=f(x)$ 便可使得函数 $g(y)$ 对于这个 y 的数值恰好是所取的 x.

根据波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 [第 **51** 段], 从序列 $\{x_n\}$ 中可分出部分序列 $\{x_{n_k}\}$, 收敛于有限的极限:

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (\text{当 } k \to +\infty),$$

并且显然 $a \leqslant x_0 \leqslant b$. 由于函数在点 x_0 处的连续性, 于是也应有

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

但这是不可能的, 因为从 (3) 式推得

$$f(x_{n_k}) \to +\infty.$$

所得的矛盾就证明了本定理.

73. 函数的最大值与最小值 我们知道, 一个无穷的数集, 即使是有界的, 也可以没有最大的 (最小的) 元素. 如果函数 $f(x)$ 在 x 的某一变化区间内是有定义的并且甚至是有界的, 那么在它的数值所组成的集 $\{f(x)\}$ 中也可以没有最大的 (最小的) 数值出现. 在这种情况下函数 $f(x)$ 的数值在这区间内不能达到上 (下) 确界. 例如, 函数

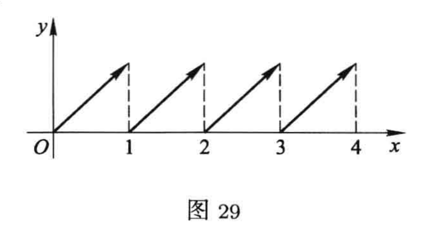


图 29

$$f(x) = x - E(x)$$

就是这个样子 (在图 29 中画出了它的图形). 当 x 在任何区间 $[0, b] (b \geqslant 1)$ 上变化时函数值的上确界是 1, 但 1 是不能达到的数值, 所以函数没有最大的值.

读者想必已明白, 这情况是因所考察的函数当 x 取自然数值时具有间断点而引起的. 实际上, 对于在闭区间上连续的函数有:

魏尔斯特拉斯第二定理 若在**闭**区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 有定义并且是连续的, 则在这区间上它必**达到**其上确界与下确界.

换句话说, 在区间 $[a, b]$ 上可求得这样的两点 x_0 与 x_1, 使得 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 两数值分别为函数 $f(x)$ 的全部数值中的最大者与最小者.

证明 令

$$M = \sup\{f(x)\};$$

依前面的定理, 这是有限的数值. 假定 (与需要证明的事实相反) 总有 $f(x) < M$, 就是说, $f(x)$ 不能达到上界 M. 在这情形下可以考察辅助函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

因为由假设这里的分母不为零, 所以这函数是连续的, 因而 (由前一定理) 是有界的: $\varphi(x) \leqslant \mu (\mu > 0)$. 但由此不难得到

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu},$$

就是说, 小于 M 的数 $M-\dfrac{1}{\mu}$ 是函数 $f(x)$ 的数值的上界, 然而这是不可能的, 因为 M 是这些数值的上确界. 所得的矛盾证明了定理: 在区间 $[a,b]$ 上可求得这样的数值 x_0, 使得 $f(x_0)=M$ 是 $f(x)$ 的全部数值中的最大者.

同样可以证明关于最小值的断言.

我们要注意, 上面所引进的证明是纯粹的 "存在性的证明", 但没有给出任何计算数值 $x=x_0$ 的方法. 以后 [在第七章 §1 内] 在对函数作更多的假设下, 我们会学到实际求函数达到最大或最小值的自变量的数值.

若函数 $f(x)$ 当 x 在任何一区间 $\mathscr{X}$ 内变化时是有界的, 则它在这区间内的上确界与下确界之差

$$\omega = M - m$$

叫做它在这区间内的振幅. 也可以这样来定义, 振幅 ω 为差 $f(x'')-f(x')$ 的绝对值的上确界, 其中 x' 和 x'' 取区间 $\mathscr{X}$ 中彼此独立的任意值:

$$\omega = \sup_{x',\ x''}\{|f(x'')-f(x')|\}.$$

当我们所谈的是在有限的闭区间 $\mathscr{X}=[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 时, 则由已证明的定理推知, 函数的振幅就是它在这区间上的最大值与最小值之差.

在这情形下函数值的区间 $\mathscr{Y}$ 是闭区间 $[m,M]$, 而振幅就是它的长度.

74. 一致连续性的概念 若函数 $f(x)$ 在某一区间 $\mathscr{X}$ (闭的或非闭的, 有限的或无穷的) 内有定义的并且在这区间的点 x_0 处是连续的, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

或者 ("用 ε–δ 语言", 第 **60** 段): 对于任一数 $\varepsilon>0$, 可求得这样的数 $\delta>0$, 使得

$$\text{由 } |x-x_0|<\delta \text{ 推出 } |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

现在假定函数 $f(x)$ 在全区间 $\mathscr{X}$ 内是连续的, 就是说, 在这区间的每一点 x_0 处是连续的. 于是对于 $\mathscr{X}$ 内的每一点 x_0, 依照给定的 ε 可个别地求得在上述意义下与它相对应的 δ. 当 x_0 在 $\mathscr{X}$ 的范围内改变时, 即使 ε 不变, 一般说来数 δ 是要改变的. 只要一看图 30 就会相信: 在函数变化得慢的地方 (图像表现为平坦的曲线时) 所适用的数 δ 比在函数变化得快的地方 (在那里图像陡升或陡降) 所适用的 δ 要大得多. 换句话说, 数 δ 一般说来不仅依赖于 ε, 而且也依赖于 x_0.

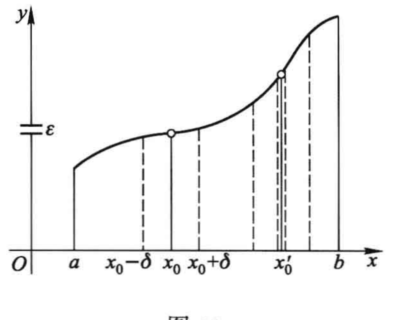


图 30

如果只论及 x_0 的有限多个数值 (当 ε 不变时), 则由有限多个对应的 δ 的数值中自然可以选得最小的一个, 而这一个数值 δ 显然同时适用于所考虑的全部点 x_0.

可是, 对于包含在区间 $\mathscr{X}$ 内的无穷多个数值 x_0 来说, 却不能这样去推断: (当 ε 不变时) 与这无穷多个 x_0 的数值相对应的, 是无穷多个 δ 的数值, 在这些数值中可能有要多小就多小的数值. 因此, 对于在区间 $\mathscr{X}$ 内连续的函数 $f(x)$ 来说, 就发生了一个问题: 当给定 ε 时, 是否存在有这样一个 δ, 它适用于这区间内所有一切的点 x_0?

如果对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 可求得这样一个数 $\delta > 0$, 使得

$$\text{由 } |x - x_0| < \delta \text{ 可推出 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

*而不论点 x 与 x_0 落在所考虑的区间 $\mathscr{X}$ 什么地方, 我们就说, 函数 $f(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内是***一致连续***的.*

在这种情况下数 δ 只依赖于 ε, 并且在选定点 x_0 以前就可把它指出: δ 同时适用于所有的 x_0.

一致连续性的意思是: 在区间的各个部分只要变元的两个数值接近到同样一种程度, 就可以使对应的函数值达到所需的接近程度.

可以举例说明, 函数在一区间的所有点处的连续性不一定能保证它在这区间的*一致连续性*. 例如, 设当 $0 < x \leqslant \dfrac{2}{\pi}$ 时 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x = 0$ 这个值是*除外*的. 在这情形下 x 的变域是*非闭*的区间 $\left(0, \dfrac{2}{\pi}\right]$, 而在它的每一点处函数是连续的. 现在令 $x_0 = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \dfrac{1}{n\pi}$, 其中 n 是任一自然数; 于是

$$f(x_0) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1, \quad f(x) = \sin n\pi = 0,$$

由此可见, 虽然 $|x - x_0| = \dfrac{1}{n(2n+1)\pi}$ 可以随着 n 的增大而变得任意小, 但总有

$$|f(x) - f(x_0)| = 1.$$

在这里虽然由于函数的连续性对于 $\left(0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ 中每一个个别的数值 x 都存在着相应的 δ, 可是当 $\varepsilon = 1$ 时绝不能求得一个 δ 使对于 $\left(0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ 中所有的点 x_0 同时都能适用!

75. 关于一致连续性的定理 极可注意的是, 在闭区间 $[a, b]$ 上却不再有类似于上面的情况, 下面的定理说明了这件事.

康托尔定理[①] *若在闭区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 有定义并且是连续的, 则在这区间上它也是***一致***连续的.*

---

①康托尔 (G. Cantor) (1845—1918) 是德国的著名数学家、现代集合论的创始人.

证明 从反面来进行. 假定对于某一确定的数 $\varepsilon > 0$ 不存在一致连续的定义中所说的数 $\delta > 0$. 在这情形下, 不论取怎样的数 $\delta > 0$, 总可在区间 $[a, b]$ 上求得这样的两个数值 x 与 x',

$$\text{虽然 } |x - x'| < \delta \quad \text{但是 } |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon.$$

现在取正数序列 $\{\delta_n\}$ 使 $\delta_n \to 0$. 根据所述, 对于每一个 δ_n 可在 $[a, b]$ 中求得数值 x_n 与 x_n' (它们起着 x 与 x' 的作用) $(n = 1, 2, \cdots)$,

$$\text{虽然 } |x_n - x_n'| < \delta \quad \text{但是 } |f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon.$$

由波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 [第 **51** 段], 从有界序列 $\{x_n\}$ 内可以取出收敛于区间 $[a, b]$ 中某一点 x_0 的部分序列. 为了不使记号繁琐, 我们就认为序列 $\{x_n\}$ 本身已收敛于 x_0.

因为 $x_n - x_n' \to 0$ (这可由 $|x_n - x_n'| < \delta_n$ 与 $\delta_n \to 0$ 推来), 所以序列 $\{x_n'\}$ 同时也收敛于 x_0. 于是由函数在点 x_0 处的连续性, 应该有

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad \text{与} \quad f(x_n') \to f(x_0),$$

因此

$$f(x_n) - f(x_n') \to 0,$$

但这与对于一切的数值 n 有

$$|f(x_n) - f(x_n')| \geqslant \varepsilon$$

的事实相矛盾. 定理已被证明.

从已证明的这个定理直接得出对我们以后有用的一个推论.

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的. 于是对于给定的 $\varepsilon > 0$ 可求得这样的 $\delta > 0$, 只要把区间任意地分成其长度都小于 δ 的部分区间, 则在每一个部分区间中函数的振幅都会小于 ε.

事实上, 如果依给定的 $\varepsilon > 0$ 选取在一致连续的定义中所说的那个数作为 δ, 则在长度小于 δ 的部分区间中函数的任意两个数值之差按绝对值都小于 ε. 特别地, 在所说的部分区间中如取函数的最大值与最小值, 则它们的差 (即函数在这部分区间中的振幅, 见第 **73** 段) 也要小于 ε.

在五十年的期间内, 连续函数的一些基本性质, 从比较 "明显的" 性质起到上述定理所建立的一致连续的精细性质止, 一个个地被证明了. 我们再一次着重指出, 这些证明只在 19 世纪后半期发展了的实数的算术理论基础上才得到了应有的严格性.

第五章　一元函数的微分法

§1. 导数及其计算

76. 动点速度的计算问题　在叙述微积分学的基础时, 我们要请读者注意: 微积分学的思想早在 17 世纪 (也就是说, 远在我们前几章学过的精确的理论出现以前) 就已萌芽了. 一直要到这一卷最后一章我们才有可能再来叙述数学分析前史中的关键, 并且介绍牛顿和莱布尼茨两个伟大数学家的功绩, 他们创造了确乎新颖的计算方法, 而完成了先辈的工作. 以下我们将按照现代所要求的严格性来叙述, 而不是按照问题的历史程序.

然而为了介绍微分学, 我们先在本段中考虑速度问题, 而在下段中考虑切线问题; 这两个问题在历史上都是与微分学的基本概念 —— 后来叫做导数 —— 的形成有关的.

我们先从一个特例入手, 就是考虑具有重量的质点的自由降落 (为了可以不计算空气的阻力, 假定它在真空中降落).

若时间 t (秒, s) 是从开始降落的时刻算起的, 则在这一段时间内质点所经过的路程 s (米, m), 依照已知的公式, 可以表示为

$$s = \frac{gt^2}{2}, \tag{1}$$

式中 $g = 9.81$. 由此出发, *要来确定该点在某一时刻* t, 即当动点在位置 M 时 (图 31) 的*运动速度* v.

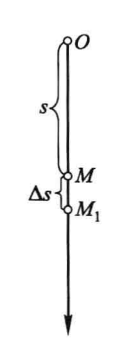


图 31

给变量 t 加一增量 Δt, 并且考虑时刻 $t + \Delta t$, 这时动点在位置 M_1 处. 我们用 Δs 来表示在这段时间 Δt 内路程的增量 MM_1.

在 (1) 中用 $t+\Delta t$ 代换 t, 则得到路程的新值的表达式

$$s+\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2,$$

由此

$$\Delta s=\frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t+\Delta t^2).$$

用 Δt 除 Δs, 我们就得出动点在区间 MM_1 内降落的平均速度:

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

我们可以看到, 这个速度是随着 Δt 的变化而变化的, 并且所经过的 Δt 这段时间越短, 它就越能更好地表示出降落的点在这一时刻 t 的状态.

当 Δt 趋向于零时, 质点在时间 Δt 内的平均速度 $\overline{v}$ 的极限 v 称为质点在时刻 t 的速度.

在我们的情况下, 显然

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

在一般的情形, 比如说, 在质点的直线运动中, 速度 v 也可以类似地算出. 质点的位置是由它与某一始点 O 的距离 s 来确定的; 这个距离就叫做该点*所经过的路程*. 时间 t 是从某一开始的时刻算起, 而且在开始的时刻, 质点并不一定要在 O 处. 当已经知道了*运动方程* $s=f(t)$ 的时候, 运动就认为是完全给定了. 从这个方程可以确定质点在任一时刻的位置; 在刚才考虑过的例子中, 方程 (1) 就起了这种作用.

要确定质点在所给的时刻 t 的速度 v, 像前面那样必须给 t 以一增量 Δt; 于是对应地路程 s 就增大了 Δs, 比值

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

表示出在时间 Δt 内的*平均速度* $\overline{v}$, 由此取极限, 就得到在时刻 t 的*瞬时速度* v:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

以下我们考虑另外一个重要的问题, 我们会看到, 它也将引入同样的极限运算.

77. 作曲线的切线的问题 设已给曲线 (K) (图 32) 及其上一点 M; 我们来建立在曲线上点 M 处的切线的概念.

在中学课程里, *圆的切线*定义为: "与曲线只有一个公共点的直线". 但是这一定义具有特例的性质, 没有说出问题的本质. 例如, 若想将这一定义应用于抛物线 $y=ax^2$ (图 33 (a)) 上, 那么在原点 O 处两个坐标轴就都会符合于这个定义; 但是 —— 大概读者也能立刻明白 —— 事实上只有 x 轴是抛物线在点 O 处的切线!

现在我们来给出切线的一般定义. 在曲线 (K) 上 (图 32) 除去点 M 以外再取一点 M_1, 并且作割线 MM_1. 当点 M_1 沿着曲线移动时, 这割线将绕着点 M 而旋转.

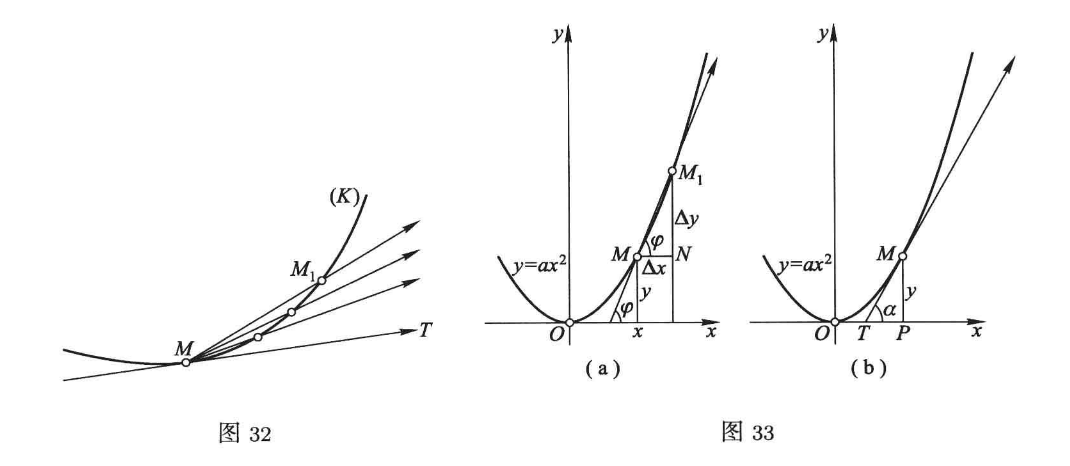


图 32　　图 33

当点 M_1 沿着曲线 (K) 而趋向于 M 时, 割线 MM_1 的**极限**位置 MT 就叫做曲线 (K) 在点 M 处的切线. 这个定义的意思就是: 只要弦 MM_1 趋向于零, $\angle M_1MT$ 就趋向于零.

现在, 我们应用这个定义去求在抛物线 $y=ax^2$ 上任意点 $M(x,y)$ 处的切线来作为一个例子. 因为切线通过这点, 所以要想确定它的位置, 只要知道它的斜率就行了. 我们于是就提出求 M 点处切线斜率 $\tan\alpha$ 这一问题.

给横坐标 x 以增量 Δx, 就由曲线上的 M 点转到 M_1 点, 它的横坐标是 $x+\Delta x$, 纵坐标是

$$y+\Delta y=a(x+\Delta x)^2$$

(图 33 (a)). 割线MM_1 的斜率 $\tan\varphi$ 可由直角三角形 MNM_1 来确定. 三角形的直角边 MN 等于横坐标的增量 Δx, 而直角边 NM_1 显然是纵坐标的对应的增量

$$\Delta y=a(2x\cdot\Delta x+\Delta x^2),$$

因此

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+a\Delta x.$$

要得到切线的斜率, 容易理解, 需要去求当 $\Delta x\to 0$ 时上式的极限, 因为 $\Delta x\to 0$ 等价于弦 $MM_1\to 0$. 这时 $\varphi\to\alpha$, 而 (由于函数 $\tan\varphi$ 的连续性), $\tan\varphi\to\tan\alpha$.

这样, 我们求得结果:

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\Delta x)=2ax^{①}.$$

①我们顺便指出, 从这里可以推得实际去作抛物线的切线的简法. 就是, 在 $\triangle MPT$ (图 33 (b)) 中线段

$$TP=\frac{y}{\tan\alpha}=\frac{ax^2}{2ax}=\frac{x}{2},$$

因此 T 是线段 OP 的中点. 于是, 要想作出抛物线上在点 M 处的切线, 就只要平分线段 OP, 再将它的中点和 M 连接起来就是了.

在任意曲线的情形, 设曲线的方程是

$$y = f(x),$$

我们也可以用相似的方法来确定切线的斜率. 设与横坐标的增量 Δx 相对应的纵坐标的增量是 Δy, 则比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示割线的斜率 $\tan\varphi$. 求这比值当 $\Delta x \to 0$ 时的极限, 我们就得到切线的斜率:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

78. 导数的定义 比较一下我们在解决上面所考虑的两个基本问题时所做的运算, 就容易看出, 在这两种情形下 —— 若撇开变量的具体意义上的差别 —— 本质上是做了同样一件事: 即将函数的增量除以自变量的增量, 再计算比值的极限. 用这种方法我们就得到微分学的基本概念 —— 导数的概念.

设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 $\mathscr{X}$ 内. 从自变量的某一数值 $x = x_0$ 出发, 加一增量 $\Delta x \gtrless 0$, 而使自变量不超出区间 $\mathscr{X}$, 因而新值 $x_0 + \Delta x$ 也属于这个区间. 于是函数值 $y = f(x_0)$ 就变成新值 $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, 即得到了增量

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

若函数的增量 Δy 与引起这个增量的自变量的增量 Δx 的比值的极限当 Δx 趋向于零时存在, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

*存在, 那么这个极限就叫做函数 $y = f(x)$ 当给定值 $x = x_0$ 时 (或在给定的点 $x = x_0$ 处) 对于自变量的***导数**[①].

这样, 当给定了值 $x = x_0$ 时, 导数 —— 如果存在 —— 是一个确定的数[②], 又若导数在整个区间 $\mathscr{X}$ 内存在, 就是说, 若导数对于这个区间内的每一个 x 的数值都存在, 则它仍是 x 的函数.

应用刚才引入的概念, 则在 **76** 段中关于动点的速度所讲的话就可以概括地说成:

速度 v 是动点所经过的路程 s 对于时间 t 的导数.

若在较广泛的意义上去理解 "速度" 这个名词, 就可以把导数总可解释为某一种 "速度". 就是说, 有了自变量 x 的函数 y 后, 就可以提出变量 y 对于变量 x (当 x 的值已给定时) 的变化速度的问题.

若加于 x 的增量 Δx 引起了 y 的增量 Δy, 则与 **76** 段类似, 比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 就可以作

① "导数" 这个名词在 18 和 19 两个世纪之交的时候就已被拉格朗日采用了.

② 上面所讲的极限暂时限于有限的情形 [参看 **87** 段].

为, 当 x 变动一个数量 Δx 时, y 对于 x 的变化的平均速度

$$\overline{V} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当 Δx 趋向于零时, 这个比值的极限自然就叫做 y 在给定的 x 值时的变化的速度:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

即刚好是 y 对于 x 的导数.

在 **77** 段中我们曾经考虑过由方程 $y = f(x)$ 所给定的曲线, 而且解决了在曲线上一定点引一切线的问题. 现在我们可以把所得的结果叙述如下.

切线的斜率 $\tan\alpha$ 是纵坐标 y 对于横坐标 x 的导数.

导数的这一几何解释时常很有用处.

除了前面考虑过的例子以外, 我们还再举几个能说明导数概念的作用的例子.

假定运动的速度 v 不是常量, 而它本身也是随着时间 t 而变化的: $v = f(t)$, 现在来研究 "速度变化的速度", 并称之为加速度.

就是, 假定对应于时间的增量 Δt, 速度的增量是 Δv, 则比值

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

表示在时间 Δt 内的平均加速度, 而它的极限就给出在给定时刻运动的加速度:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

因此, 加速度是速度对于时间的导数.

现在我们来考虑连续地沿着某一条直线段质量 (其实是沿着一条枢轴, 不过我们忽略掉了轴的宽度和厚度!) 的 "线性" 分布. 设在这一线段上点的位置是由横坐标 x 来决定的, x 是从线段的端点算起 (例如, 按厘米计算). 则沿着区间 $[0, x]$ 所分布的质量 m 将依赖于 $x: m = f(x)$. 区间终点的横坐标 x 的增量 Δx 将会引起质量的增量 Δm: 换句话说, Δm 是紧靠着 x 的区间 $[x, x + \Delta x]$ 上的质量. 于是在所指定的这个区间上质量分布的平均密度可以用比值

$$\overline{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

表示出来. 当区间缩成一点时, 即是当 $\Delta x \to 0$ 时, 这个平均密度的极限

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \overline{\rho} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

就叫做在点 x 的 (线性) 密度: 这一密度是质量对于横坐标的导数.

现在来看热学方面, 并用导数来建立物体对所给温度的热容量的概念.

我们用下面的记号来表示在问题中所引入的物理量: θ 是温度 (摄氏温度), W 是使物体从 $0°$ 加热到 $\theta°$ 时所需要的热量 (卡)[①]. 显然, W 是 θ 的函数: $W = f(\theta)$. 给 θ 以某一增量 $\Delta\theta$, 于是 W 也得到一个增量 ΔW. 物体从 $\theta°$ 加热到 $(\theta+\Delta\theta)°$ 时的平均热容量就是

$$\overline{c} = \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

但是一般地说, 当 $\Delta\theta$ 变化时, 平均热容量也是变化的, 所以我们就不能把平均热容量当作在一给定的温度 θ 时的热容量. 要想得到后者, 必需要把上式取极限:

$$c = \lim_{\Delta\theta\to 0} \overline{c} = \lim \frac{\Delta W}{\Delta\theta}.$$

因此, 可以说, *物体的热容量是热量对于温度的导数*.

导数的一切应用 (很容易再多举一些) 十分鲜明地显示出这一事实, 就是导数与各个知识领域中的基本概念有本质的联系, 并且帮助了这些概念的建立.

导数的计算、它的性质的研究和应用就是微分学的主要研究对象.

导数常用以下各种符号来表示:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \frac{df(x_0)}{dx}{}^{②} \quad (\text{莱布尼茨});$$
$$y' \quad \text{或} \quad f'(x_0) \quad (\text{拉格朗日});$$
$$Dy \quad \text{或} \quad Df(x_0) \quad (\text{柯西}).$$

此后我们主要地要使用拉格朗日的简单的记号. 如果用的是函数记号 [参看, 第二纵列], 那么在括号内的字母 x_0 正好就是指的在计算导数时的那个自变量的数值. 最后, 我们要指出, 在某种情况中, 可能会发生, 对于哪个变量而取导数 (即对应于哪个变量去求 “函数变化的速度”) 这一问题, 这时我们就用下标的形式指出这个变量:

$$y'_x, \quad f'_x(x_0), \quad D_x y, \quad D_x f(x_0),$$

此处下标 x 与自变量的那个特殊值 x_0 (在 x_0 处计算导数) 是无关的.

(在某种意义上, 可以说, 整个符号

$$\frac{df}{dx}, \quad f' \quad \text{或} \quad f'_x, \quad Df \quad \text{或} \quad D_x f$$

就是导函数的*函数记号*.)

现在, 利用刚才引入的表示导数的符号, 就可以把前面得到的某些结果写下. 对于运动的速度就有

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{或} \quad v = s'_t,$$

①原文如此, 按现在国际通用和我国的国家标准, 热量单位是焦耳 (J) —— 编者.

②我们暂时把莱布尼茨的记号看作是整个符号; 以下我们就会看到, 它也可以看作是一个分数. 我们不采用牛顿的记号: $\dot{y}$, 在这个记号里, 假定了作为自变量的就是时间 (关于这点, 请参看 **224** 段).

对于加速度

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{或} \quad a = v'_t.$$

类似地, 曲线 $y = f(x)$ 的切线的斜率就可写为:

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \tan\alpha = y'_x$$

以及其他等等.

79. 计算导数的例 我们来计算一些初等函数的导数作为例子.

1° 首先我们可以看到一个明显的结果: 若 $y = c =$ 常数, 则不论 Δx 如何, 恒有 $\Delta y = 0$, 所以 $y' = 0$; 又若 $y = x$, 则 $\Delta y = \Delta x$ 而 $y' = 1$.

2° 幂函数: $y = x^{\mu}$ (其中 μ 是任意实数). x 的变域依赖于 μ; 这个变域在 **22** 段, 2° 中已经指出过了. 我们有 (当 $x \neq 0$ 时)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

如果利用在 **65** 段, 3) 中已算出的极限, 就得到

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1}.\text{①}$$

特殊情形:

$$\text{若 } y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad \text{则 } y' = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$
$$\text{若 } y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{则 } y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3° 指数函数: $y = a^x (a > 0, -\infty < x < +\infty)$. 这里

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

利用在 **65** 段, 2) 中已算出的极限, 便得:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

特别地:

$$\text{若 } y = e^x, \quad \text{则 } y' = e^x.$$

因此, 指数函数 (当 $a > 1$ 时) 的增大速度是与函数值成正比的: 当函数值增得越大时, 它在这一时刻也就增长得越快. 这就给指数函数的增长性以精确的描述.

① 若是 $\mu > 1$, 则容易直接求得在 $x = 0$ 时, 导数的值: $y' = 0$.

4° 对数函数: $y = \log_a x \ (0 < a \neq 1, 0 < x < +\infty)$. 在这时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}.$$

利用在 **65** 段, 1) 中已算出的极限:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

特别地, 对于自然对数就得出非常简单的结果:

$$\text{当} \quad y = \ln x \quad \text{时有} \quad y' = \frac{1}{x}.$$

这也就是在理论研究中宁愿采用自然对数的一种根据 (虽然这在实质上并不是什么新的根据).

对数函数 (当 $a > 1$ 时) 的增大速度是与变元值的增长成反比的, 并且当变元无限增大时, 增大速度就保持着正值而趋向于零, 这些情况很好地说明了对数函数增长的特性.

5° 三角函数: 假定 $y = \sin x$, 于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

利用 $\cos x$ 的连续性与已知的 [**34** 段, 5)] 极限 $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, 我们得到

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x^{①}.$$

类似地我们得到:

$$\text{若} \quad y = \cos x, \quad \text{则} \quad y' = -\sin x.$$

①注意, 这一公式的简洁性应当归功于用弧度来做角度的单位. 如果我们用度数来做单位, 则正弦对于角度的比值的极限就不会是 1, 而很容易看出是 $\frac{\pi}{180}$, 于是我们就会有

$$(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x.$$

在 $y=\tan x$ 时, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$
$$=\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}$$
$$=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}.$$

由此, 和上面一样,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

类似地,

$$若\quad y=\cot x,\quad 则\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

80. 反函数的导数 在求反三角函数的导数之前, 我们先来证明下面的普遍的定理.

定理 *假定: 1) 函数 $f(x)$ 满足* **71** *段中反函数的存在定理中的条件, 2) 函数在点 $x=x_0$* **有有限的且异于零的导数** *$f'(x_0)$. 那么对于反函数 $x=g(y)$ 在对应点 $y_0=f(x_0)$ 导数也是存在的, 且等于 $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

证明 给数值 $y=y_0$ 以任意的增量 Δy, 则函数 $x=g(y)$ 也得到对应的增量 Δx. 注意, 当 $\Delta y\neq 0$ 时, 由于函数 $y=f(x)$ 的单值性, 也有 $\Delta x\neq 0$. 我们有

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

现在若是 Δy 依任意的规律趋向于零, 则 —— 由于函数 $x=g(y)$ 的连续性 —— 增量 Δx 也要趋向于零. 但那时上面等式右边的分母就趋向于极限 $f'(x_0)\neq 0$, 因此, 左边的极限存在, 且等于其倒数 $\dfrac{1}{f'(x_0)}$; 它就是导数 $g'(y_0)$.

这样, 就有简单的公式:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

我们容易去说明它的几何意义. 我们知道, 导数 y'_x 是角 α 的正切, 而 α 是函数 $y=f(x)$ 的图形上的切线与 x 轴间所夹的角. 但是反函数 $x=g(y)$ 也有同一个图形, 不过它的自变量却放置在 y 轴上了, 因此导数 x'_y 等于同一切线与 y 轴间的角 β 的正切 (图 34). 这样, 上面导出的公式就归结为大家知道的和为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的两角 α 与 β 的正切之关系式

$$\tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

取 $y = a^x$ 为例. 它的反函数就是 $x = \log_a y$. 因为 (参看 3°) $y'_x = a^x \cdot \ln a$, 所以按照我们的公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{y},$$

与 4° 相符合.

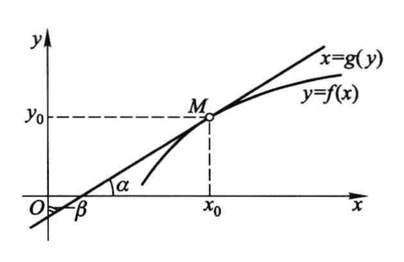


图 34

现在我们来计算反三角函数的导数, 为了方便起见, 我们把变量 x 及 y 对调一下, 而把已经证明了的公式改写成为

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

6° *反三角函数*: 考虑函数 $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$, 其中 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. 它是函数 $x = \sin y$ 的反函数, 函数 $x = \sin y$ 在指定的 y 值处有正值的导数 $x'_y = \cos y$. 在这种情况下导数 y'_x 也存在, 而且依照我们的公式, 有

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

根号前我们取正号, 这是因为 $\cos y > 0$.

我们除去了数值 $x = \pm 1$, 因为在它的对应值 $y = \pm\frac{\pi}{2}$ 处导数 $x'_y = \cos y = 0$.

函数 $y = \arctan\ x$ $(-\infty < \ x < +\infty)$ 是函数 $x = \tan y$ 的反函数. 依我们的公式, 有

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

类似地可以得到:

对于 $y = \arccos x$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

对于 $y = \operatorname{arccot} x$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

81. 导数公式汇集 现在把我们求出的一切公式汇集如下:

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $y = a^x$　　$y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x$　　$y' = e^x$

5. $y = \log_a x$　　$y' = \dfrac{\log_a e}{x}$

$y = \ln x$　　$y' = \dfrac{1}{x}$

6. $y = \sin x$　　$y' = \cos x$

7. $y = \cos x$　　$y' = -\sin x$

8. $y = \tan x$　　$y' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = \cot x$　　$y' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x$　　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \arccos x$　　$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = \arctan x$　　$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y = \operatorname{arccot} x$　　$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

82. 函数增量的公式　现在我们要证明以后要用到的两个简单的断言.

设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 $\mathscr{X}$ 内. 从这个区间内的定值 $x = x_0$ 出发, 用 $\Delta x \gtrless 0$ 来记 x 的任意增量, 不过要加以限制使点 $x_0 + \Delta x$ 不超出 $\mathscr{X}$ 范围以外. 于是函数的对应增量就是

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1° 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有 (有限的) 导数 $y'_x = f'(x_0)$, 则函数的增量可以表示成这一形式

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{2}$$

或简写为

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{2a}$$

其中 α 是依赖于 Δx 的量, 并且随着 Δx 一同趋向于零.

因为, 按导数的定义, 当 $\Delta x \to 0$ 时

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_x,$$

故令

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

可见 $\alpha \to 0$. 由此解出 Δy, 即得公式 (2a).

因为量 $\alpha \cdot \Delta x$ (当 $\Delta x \to 0$ 时) 是一个比 Δx 高级的无穷小量, 于是利用在 **54** 段中引进的符号, 我们的公式就可以改写成为

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \tag{3}$$

或

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{3a}$$

附注 迄今为止, 我们认为 $\Delta x \gtrless 0$; 而量 α 在 $\Delta x = 0$ 时是不确定的. 当我们说, 在 $\Delta x \to 0$ 时, $\alpha \to 0$, 我们预先就 (像通常那样) 假定了 Δx 是依着任意的规律趋向于零的, 但却不取零值. 现在就令在 $\Delta x = 0$ 时 $\alpha = 0$; 于是公式 (2) 当然在 $\Delta x = 0$ 时仍是成立. 除此以外, 关系式

$$\text{当} \quad \Delta x \to 0 \quad \text{时} \quad \alpha \to 0$$

还可以比以前更广泛地理解, 就是说, 在 $\Delta x \to 0$ 的过程中, Δx 也可以取零值了.

由已经证明的公式直接推得:

2° *如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有 (有限的) 导数, 则函数在这点必定是***连续的**.

事实上, 由 (2a) 显然地, 从 $\Delta x \to 0$ 这关系就引出了 $\Delta y \to 0$.

83. 计算导数的几个最简单法则 在前几段中我们已经算出了初等函数的导数. 在这一段和下一段中我们将要建立一系列的简单法则, 有了它们就能去计算任意的 (由初等函数经过有限多回的算术运算和叠置而成的) 函数 [**25** 段] 的导数.

I. *设函数 $u = \varphi(x)$ (在定点 x 处) 有导数 u'. 我们要证明函数 $y = cu$ ($c =$ 常数) (在同一点处) 也有导数, 而且要计算这一导数.*

若自变量 x 得一增量 Δx, 则函数 u 由开始的数值 u 变到数值 $u + \Delta u$ 也得一增量 Δu. 而函数 y 的新值就是 $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$. 由此 $\Delta y = c \cdot \Delta u$, 而

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

因此, 导数存在而且等于

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

这个公式表示出这样的一条法则: *常数因子可以挪到导数符号的外面来.*

II. *设函数 $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ (在定点 x 处) 有导数 u', v'. 我们要证明函数 $y = u \pm v$ (在同一点) 也有导数, 而且要计算这一导数.*

给 x 以增量 Δx; 于是 u, v 及 y 也对应地得到增量 $\Delta u, \Delta v$ 及 Δy. 它们的新值是 $u + \Delta u, v + \Delta v, y + \Delta y$ 而有关系式:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v).$$

由此

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

并且

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

于是导数 y' 存在并且等于

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

这个结果可以很容易地推广到任意有限项的情形 (而且是用同样的方法).

Ⅲ. *在关于函数 u, v 同样的假定下, 要证明函数 $y = u \cdot v$ 也有导数, 而且求出它.*

同上面一样, 对应于增量 Δx 有增量 $\Delta u, \Delta v$ 及 Δy; 这时 $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$. 因此

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

因为由 **82** 段, 2°, 当 $\Delta x \to 0$ 时也有 $\Delta v \to 0$, 于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v',$$

即是, 导数 y' 存在且等于

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

若 $y = uvw$, 并且 u', v', w' 存在, 则

$$y' = [(uv) \cdot w]' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

容易想到, 对于 n 个因子的情况我们也类似地有:

$$[\overbrace{uvw \cdots s}^{n}]' = u'vw \cdots s + uv'w \cdots s + uvw' \cdots s + \cdots + uvw \cdots s'.$$

这可以用数学归纳法去证明.

Ⅳ. *最后, 若 u, v 满足前面的假定, 此外, v 又异于零, 则我们要证明函数 $y = \dfrac{u}{v}$ 也有导数, 而且求出它.*

在与前面一样的记号下, 便有

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

于是

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} \quad 及 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

此处当 Δx 趋向于零时 (则同时也有 $\Delta v \to 0$), 我们就可确知导数的存在了:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

84. 复合函数的导数 现在我们可以建立一条在实际求导数时非常重要的法则, 这个法则使得我们在知道了各个组成函数的导数的时候, 就可以计算出复合函数的导数.

V. 设: 1) 函数 $u = \varphi(x)$ 在某一点 x_0 有导数 $u'_x = \varphi'(x_0)$, 2) 函数 $y = f(u)$ 在对应点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处有导数 $y'_u = f'(u)$. 那么复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在上述的点 x_0 处也有导数, 它等于函数 $f(u)$ 的导数与函数 $\varphi(x)$ 的导数的乘积:

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)^{①}$$

或简写为

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

为了证明, 给 x 以任意的增量 Δx; 设 Δu 是函数 $u = \varphi(x)$ 的对应增量, 最后设 Δy 是由增量 Δu 引起的函数 $y = f(u)$ 的增量. 利用式 (2a), 把 x 换成 u, 而 (2a) 改写为:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α 依赖于 Δu 且与它一同趋向于零). 用 Δx 除各项, 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

若 Δx 趋向于零, 则 Δu 也要趋向于零 [**82**, 2°], 于是我们知道, 依赖于 Δu 的量 α 也同样要趋向于零. 因此, 极限存在:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

它就是所要求的导数 y'_x.

附注 **82** 段中有关于在 $\Delta x = 0$ 时量 α 的附注, 它的效用在这里就表现出来了: 当 Δx 是自变量的增量时, 我们总可假定它是异于零的, 但是当 Δx 换成函数 $u = \varphi(x)$ 的增量时, 那么即使在 $\Delta x \neq 0$ 时, 我们也没有权利设想 $\Delta u \neq 0$.

---

①要着重指出, 符号 $f'_u(\varphi(x_0))$ 是表示函数 $f(u)$ 对于它的变元 u (不是对于 x) 在值 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处算出的导函数之值.

85. 例[①] 先举几个应用法则 I — Ⅳ 的例.

1) 考虑多项式:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

先用法则 Ⅱ, 再用法则 I, 我们有

$$\begin{aligned} y' &= (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \cdots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)' \\ &= a_0(x^n)' + a_1(x^{n-1})' + \cdots + a_{n-2}(x^2)' + a_{n-1}(x)' + (a_n)'. \end{aligned}$$

利用 [**81** 段] 公式 1、2、3, 最后得到

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

2) $y = (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x$.

依法则 Ⅲ

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)' \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot (e^x)'.$$

根据前例与 [**81** 段] 公式 4, 求得

$$y' = (4x - 5) \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x = (2x^2 - x - 4) \cdot e^x.$$

3) $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$.

这里必须先利用法则 Ⅳ, 其次再用法则 Ⅱ 和 Ⅲ (以及 **81** 段公式 6、7):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x\cos x(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

这里我们是把分子与分母的导数一次就算出来了, 而没有把计算分子或分母导数的步骤一一写出. 通过习题必须要做到一般地能立刻写出导数.

计算复合函数的导数的例:

4) 设 $y = \ln\sin x$, 换句话说, $y = \ln u$, 其中 $u = \sin x$. 依法则 V, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. 导数 $y'_u = (\ln u)'_u = \dfrac{1}{u}$ (公式 5) 中 $u = \sin x$. 这样,

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad (\text{公式 } 6).$$

5) $y = e^{x^2}$, 即是 $y = e^u$, 其中 $u = x^2$;

$$y'_x = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^{x^2} \quad (\text{V; 4 和 3}).$$

当然, 去把被叠置的函数分别地写出来, 事实上是不必要的.

---

① 以下用字母 x, y, u, v 来记变量, 用其他字母记常量.

6) $y=\sin ax$; $y'_x=\cos ax\cdot(ax)'=a\cdot\cos ax$. (V; 7、1、2)

7) $y=\arctan\frac{1}{x}$; $y'_x=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{1+x^2}\quad (\text{V};12、3).$$

若遇叠置数重而成的复合函数, 则可逐次地应用法则 V 去计算.

8) $y=\sqrt{\tan\frac{1}{2}x}$;

则

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{\tan\frac{1}{2}x}}\cdot\left(\tan\frac{1}{2}x\right)'_x\quad(\text{V};3)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\tan\frac{1}{2}x}}\cdot\sec^2\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)'_x\quad(\text{V};8)$$

$$=\frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{4\sqrt{\tan\frac{1}{2}x}}.$$

我们再举几个应用这些法则的例子:

9) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+c})$; $y'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot(x+\sqrt{x^2+c})'_x$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}.$$

10) $y=\frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$; $y'=\frac{1}{c}\frac{1\cdot\sqrt{x^2+c}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}}{(\sqrt{x^2+c})^2}$

$$=\frac{1}{(x^2+c)^{\frac{3}{2}}}.$$

11) 作为一个习题我们再来研究关于幂指式 $y=u^v(u>0)$ 的导数的问题, 式中 u 与 v 是 x 的函数, 在给定的点有导数 u',v'.

把等式 $y=u^v$ 取对数, 得到

$$\ln y=v\cdot\ln u. \tag{4}$$

这样, y 的表达式又可写成 $y=e^{v\cdot\ln u}$, 从这个式子就可以明白导数 y' 是存在的. 至于去计算它, 最简单是令等式 (4) 双方对 x 的导数相等. 这时我们要利用法则 V 与 Ⅲ (记住 u, v 与 y 是 x 的函数). 我们就会得到

$$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',$$

由此

$$y'=y\left(\frac{vu'}{u}+v'\ln u\right),$$

或代入 y 的表达式,

$$y' = u^v \left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u \right). \tag{5}$$

这公式首先是由莱布尼茨与约翰 · 伯努利建立的.

例如,

$$\text{若} \quad y = x^{\sin x}, \quad \text{则} \quad y'_x = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right).$$

86. 单侧导数 在结束本节时, 我们来概述一些关于导数可能出现的特殊情况. 先从建立单侧导数的概念开始. 若所考虑的数值 x 就是函数 $y = f(x)$ 的定义区间 $\mathscr{X}$ 的端点之一, 则在计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限时, Δx 必须限于从*右方* (当所谈的 x 是区间的左端点时) 或从*左方* (x 是右端点) 趋于 0. 在这种情形, 若极限存在就叫做*右导数*或*左导数*, 这时函数的图形在对应点处就有单侧切线.

可能发生这种情形, 在内点 x 处比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的两个单侧极限虽都存在 (当 $\Delta x \to +0$ 或 $\Delta x \to -0$ 时), 但却又彼此不等; 这时它们也是叫做单侧导数. 而函数的图形在对应点处就会有两条形成了一个角的单侧切线; 这个点就是一个*角点* (图 35).

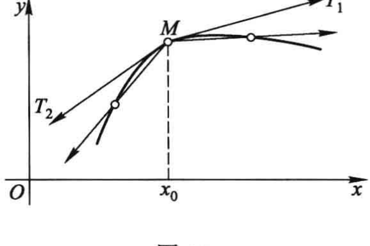


图 35

作为例子我们考虑函数 $y = f(x) = |x|$. 从数值 $x = 0$ 开始, 将有

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

若 $\Delta x > 0$, 则

$$\Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

又若 $\Delta x < 0$, 则

$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

这个函数的图形是由第一及第二象限的角平分线所组成的, 原点就成为角点.

87. 无穷导数 若增量的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x \to 0$ 时趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 则这一广义的数也叫做导数, 而且也用通常的符号来表示它.

导数作为切线的斜率这一几何解释也可推广到这个情形; 但是在这里切线就与 y 轴平行了 (图 36(a), (b)).

类似地可以建立单侧无穷导数的概念. 不过, 在这次即使有了符号不同的单侧无穷导数 (图 36(c), (d)), 也只能有唯一的一条垂直切线. 这种情况的特征就是在图形上会有向上或向下的*尖点*出现.

例如, 设 $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$; 在 $x \neq 0$ 时由 **81** 段公式 3 给出

$$f'_1(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

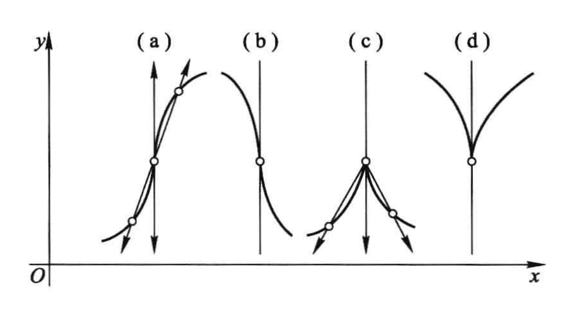


图 36

但这个公式在 $x=0$ 时是不能应用的. 这时我们可以直接用导数的定义来计算在这点的导数; 作出比式

$$\frac{f_1(0+\Delta x)-f_1(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}.$$

可见, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 比式的极限是 $+\infty$. 类似地可证函数 $f_2(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处的左导数等于 $-\infty$, 而右导数等于 $+\infty$.

利用导数概念的推广, 可以将 **80** 段中关于反函数的导数的定理加以补充, 即指出即使在 $f'(x_0)$ 等于零或 $\pm\infty$ 时, 反函数的导数 $g'(y_0)$ 仍存在而且分别等于 $\pm\infty$ 或零. 例如, 因为函数 $\sin x$ 在 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 有导数 $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, 所以反函数 $\arcsin y$ 在 $y=\pm 1$ 有无穷导数 (就是 $+\infty$).

88. 特殊情况的例子 1° *导数不存在的例*. 函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处 [参看 **86** 段] 已经是没有通常的、双侧导数. 但是函数

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(\text{当 } x\neq 0),\quad f(0)=0$$

是个更有趣的例, 它在 $x=0$ 处虽然也是连续的 [**67** 段, 4)], 可是在这一点却连单侧导数都没有. 事实上, 比值

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to\pm 0$ 时, 不趋向于任何极限.

从这个函数的图形 (图 21) 上很容易看出: 自原点 O 引出的割线 OM_1, 当 M_1 趋向于 O 时, 并无极限位置, 因此曲线在原点处没有切线 (连单侧的也没有).

在以后我们会看到一个很奇妙的例子: 函数在变元的一切值处都是连续的, 但在其中任何值处却都没有导数.

2° *导数间断的例*. 如果给定的函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $\mathscr{X}$ 内的每一点都有有限的导数 $y'=f'(x)$, 那么这个导数本身就也是在 $\mathscr{X}$ 内 x 的函数. 在迄今为止我们所遇到的大量的例子中, 函数的导数都仍是连续的. 但是有时可能并不是这样, 例如, 考虑函数

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}\quad(\text{当 } x\neq 0),\quad f(0)=0.$$

若 $x\neq 0$, 则可用通常的方法去算出它的导数:

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

但是在 $x=0$ 时以上的结果并不适用. 这时若直接用导数概念的定义, 就有

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

同时, 很清楚, $f'(x)$ 当 $x\to 0$ 时并不趋向于任何极限, 所以函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是间断的.

在这个例子中导数的间断是属于第二类的. 这并非偶然的事: 下面 [**103** 段] 我们将会看到, 导数是不能有第一类的间断的, 即不能有跃度.

§2. 微分

89. 微分的定义 设函数 $y=f(x)$ 定义在某一区间 $\mathscr{X}$ 内, 而且在所考虑的点 x_0 处是连续的. 于是相应于变元的增量 Δx 有

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

它随着 Δx 同为无穷小量. 下面的问题是很重要的: 对于 Δy 是否存在着这样的一个关于 Δx 为线性的无穷小量 $A\cdot\Delta x$ ($A=$ 常数), 使得它与 Δy 的差是一个较 Δx 高级的无穷小量:

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x). \tag{1}$$

在 $A\neq 0$ 时, 等式 (1) 的成立指出了无穷小量 $A\cdot\Delta x$ 是等价于无穷小量 Δy 的, 也就是说, 若取 Δx 作为基本无穷小量, 则 $A\cdot\Delta x$ 就成为 Δy 的主部 [**56**、**57** 段].

如果等式 (1) 成立, 则函数 $y=f(x)$ 就叫做 (在给定值 $x=x_0$ 处) **可微的**, 而表达式 $A\cdot\Delta x$ 就叫做**函数的微分**, 用符号 dy 或 $df(x_0)$ 来记它.

[在后一种符号里, 括号内的 x_0 正是指的 x 的初始值①.]

我们再重复一遍, 函数的微分具有两个特性: (a) 它乃是变元的增量 Δx 的线性齐次函数, 并且 (b) 它与函数的增量相差一个数量, 而这一数量在 $\Delta x\to 0$ 时是较 Δx 高级的无穷小量.

我们考虑几个例子.

1) 半径为 r 的圆面积 Q 由公式 $Q=\pi r^2$ 所给出. 若半径 r 增大 Δr, 则量 Q 的对应增量 ΔQ 就是包含在半径分别为 r 及 $r+\Delta r$ 的两个同心圆间的圆环面积. 从表达式

$$\Delta Q=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\cdot\Delta r+\pi(\Delta r)^2,$$

我们可以立刻看出: $2\pi r\cdot\Delta r$ 在 $\Delta r\to 0$ 时是 ΔQ 的主部; 它也是 Q 的微分 dQ, 在几何意义上, dQ 表示一个底等于圆周的长 $2\pi r$ 而高为 Δr 的矩形面积 (好像是把圆环 "伸直" 而得出的矩形).

2) 考虑质点依规律 $s=\dfrac{gt^2}{2}$ 的自由降落. 从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间 Δt 内, 动点经过了路程

$$\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\cdot\Delta t+\frac{g}{2}(\Delta t)^2.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时, Δs 的主部是 $gt\cdot\Delta t$. 我们回想起, 在时刻 t 的速度是 $v=gt$ [**76** 段], 就看出了,

①这里, df 是一个完整的函数记号.

路程的微分 (近似地替代路程的增量) 是可以这样来计算的, 即这一质点在整段时间 Δt 的过程中都以同一速度 v 来运动所经过的路程.

90. 可微性与导数存在之间的关系　现在很容易确定下一命题的正确性.

要使函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的, 其必要与充分条件是, 它在这点有有限的导数 $y'=f'(x_0)$ 存在. 当这一条件获得满足时, 等式 (1) 中的常数 A 就刚好等于这个导数, 于是

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{1a}$$

必要性　若 (1) 式成立, 则由此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

于是当 Δx 趋向于零时, 实际上就得到

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

充分性　立刻可从 **82** 段, 1° [参看彼处的 (3a)] 中推得.

因此, 函数 $y=f(x)$的微分永远是等于

$$dy = y'_x \cdot \Delta x^{①}. \tag{2}$$

这里我们还要着重地指出, 在这个表达式内的 Δx 是被我们理解为自变量的一个任意增量, 就是一个任意的数 (它时常为方便起见被当作并不依赖于 x 的). 在这时完全不必去假定 Δx 是个无穷小量; 但若 $\Delta x \to 0$, 则微分 dy 也就是个无穷小量, 就是 (当 $y'_x \neq 0$ 时) 函数的无穷小增量 Δy 的主部. 这也就使得我们有根据去近似地假定

$$\Delta y \approx dy, \tag{3}$$

而当 Δx 越小时, 则准确度就越大. 我们将在 **93** 段中再回头来考虑近似式 (3).

为了要从几何方面来解释微分 dy 以及它与函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 的关系, 我们来考虑这个函数的图像 (图 37). 变元值 x 与函数值 y 确定了曲线上的一点 M. 在曲线上的这一点引切线 MT; 正像我们在 **78** 段中所看到的, 它的斜率 $\tan\alpha$ 等于导数 y'_x. 若给横坐标 x 以增量 Δx, 则曲线的纵坐标 y 就得到增量 $\Delta y = NM_1$. 同时切线的纵坐标也得到增量 NK. 把 NK 看作是直角三角形 MNK 的一个直角边而来计算, 就得出:

$$NK = MN \cdot \tan\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

---

①容易验证, 前段所考虑过的例子的微分正好是这样组成的. 例如, 在情形 1), 就有:

$$Q = \pi r^2, \quad Q'_r = 2\pi r, \quad dQ = 2\pi r \cdot \Delta r.$$

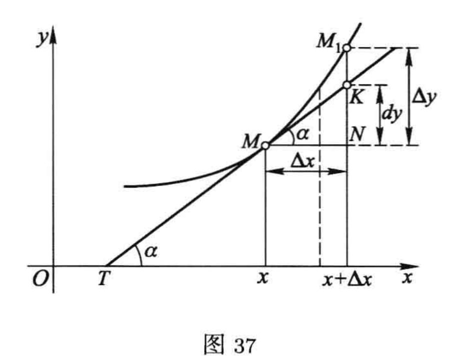


图 37

因此, 当 Δy 是曲线的纵坐标的增量时, dy 就是切线的纵坐标的对应增量.

最后我们来看看自变量 x 的本身: 它的增量 Δx, 就叫做它的微分, 即规定

$$dx = \Delta x. \tag{4}$$

假若把自变量 x 的微分与函数 $y = x$ 的微分看作是同样的 (这同样也是一种规定!), 那么引用 (2) 式就可以证明公式 (4):

$$dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

参照规定式 (4), 现在可以把给出微分定义的公式 (2) 重写成这一形式:

$$dy = y'_x \cdot dx; \tag{5}$$

我们通常就是这样写的.

由此得到

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

于是这一表达式, 我们以前把它看作是一个整体符号, 现在却可以解释成为一个分数了. 读者不应当为这种情况而困惑, 就是在等式左边是完全确定了的数, 而同时在右边我们有的却是两个不定的数 dy 及 dx (因 $dx = \Delta x$ 是任意的) 的比值, 要知道 dx 及 dy 本来是成比例地变动着的, 而导数 y'_x 刚好就是比例系数.

微分的概念与 "微分"① 这一名词是属于莱布尼茨的, 虽然他自己并没有给出这个概念的确切的定义. 莱布尼茨在考虑微分的同时也曾考虑过微商, 即是两个微分的商, 它就相当于我们的导数; 但是对于莱布尼茨来说, 微分却是一个原始的概念. 自从柯西用自己的极限理论为整个分析创立了基础, 并且第一次明确地定义导数为某种极限以后, 通常就从导数出发, 而微分的概念也就建立在导数的基础上了.

① 从拉丁文 differentia 而来, 意思就是 "差".

91. 微分的基本公式及法则 函数微分的计算法就叫做微分法①. 因为微分 dy 与导数 y'_x 只相差一个因子 dx, 所以很容易由初等函数的导数表 [**81**] 去做出它们的微分表:

1. $y = c$　　$dy = 0$
2. $y = x^\mu$　　$dy = \mu x^{\mu-1}dx$
   $y = \dfrac{1}{x}$　　$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
   $y = \sqrt{x}$　　$dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
3. $y = a^x$　　$dy = a^x \ln a dx$
   $y = e^x$　　$dy = e^x dx$
4. $y = \log_a x$　　$dy = \dfrac{\log_a e}{x}dx$
   $y = \ln x$　　$dy = \dfrac{dx}{x}$
5. $y = \sin x$　　$dy = \cos x dx$
6. $y = \cos x$　　$dy = -\sin x dx$
7. $y = \tan x$　　$dy = \sec^2 x dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
8. $y = \cot x$　　$dy = -\csc^2 x dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$　　$dy = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$　　$dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \arctan x$　　$dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$
12. $y = \operatorname{arccot} x$　　$dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

微分法则②有这些:

Ⅰ. $d(cu) = c \cdot du$,

Ⅱ. $d(u \pm v) = du \pm dv$,

Ⅲ. $d(uv) = vdu + udv$,

Ⅳ. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

---

①但是这一个名词通常也用来称呼导数的计算, 在俄语上并无这些专门名词.
②这里指的是微分的计算.

它们都可以很容易地从导数的对应法则中得出. 例如, 我们来证明后两个法则:

$$\begin{aligned}d(uv) &= (uv)' \cdot dx = (u'v + uv') \cdot dx \\ &= v(u' \cdot dx) + u(v' \cdot dx) = vdu + udv;\\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx \\ &= \frac{v(u' \cdot dx) - u(v' \cdot dx)}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.\end{aligned}$$

92. 微分形式的不变性 复合函数的微分法则使得我们能够获得微分的一个值得注意而又重要的性质.

假设 $y = f(x)$ 及 $x = \varphi(t)$ 是这样的两个函数, 由它们可以组成复合函数: $y = f(\varphi(t))$. 又若导数 y'_x 及 x'_t 都存在, 那么 —— 依照 [**84** 段] 法则 V —— 也存在着导数

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{7}$$

若把 x 当作自变量, 则微分 dy 可由公式 (5) 来表出. 现在若自变量不是 x 而是 t, 在这一假定之下, 我们对于微分 dy 就有另一个表达式:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

不过, 若将导数 y'_t 用它的表达式 (7) 来替换, 又若注意到 x 是 t 的函数, $x'_t \cdot dt$ 就是 x 的微分, 最后就可得到

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx,$$

即是, 又回到了微分的原来形式 (5) !

这样, 我们看到, *微分的形式在将原来的自变量换成新的自变量以后仍然可以保持不变*. 所以不论 x 是不是自变量, 我们永远有根据把 y 的微分写成 (5) 的形式, 仅有的差别只是在于: 若取 t 作自变量, 则 dx 表示的不是任意增量 Δx, 而是 x (作为 t 的函数) 的微分. 这个性质就叫做*微分形式的不变性*.

因为从公式 (5) 可以直接得到以微分 dx 及 dy 来表示导数 y'_x 的公式 (6), 所以不论 dx, dy *是对于哪一个自变量而求出的* (当然, 在每一个情况下, 都是对于同一个自变量而求的), 公式 (6) 始终是有效的.

例如, 设 $y = \sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$, 则

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

现在假定 $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 于是 $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, 就有 $dx = \cos t \cdot dt, dy = -\sin t \cdot dt$. 很易验证, 公式 (6) 给出的不过是上面求出的导数的另一个表达式罢了.

附注 可以用对于任意变量而取的微分来表示导数这一可能性, 在特殊情形下, 就会引出下面的结果; 就是这些公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

这些公式在莱布尼茨记号下是表示求反函数以及复合函数的导数的法则的. 现在它们就都成为简单的代数恒等式了 (因为在这里一切微分都可以对于同一个变量而取). 但是, 却不要以为这就是这些公式新的推导法: 首先, 这里并没有证明过等式左边的导数的*存在*, 而且主要的还在于我们实质上应用了微分形式的不变性, 而它本身却是法则 V 的推论.

93. 微分作为近似公式的来源 我们已经看到, 在 $\Delta x\to 0$ 时, 函数 y 的微分 dy (只要 $y'_x\neq 0$) 是函数的无穷小增量 Δy 的主部. 这样, $\Delta y\sim dy$, 于是

$$\Delta y\approx dy, \tag{3}$$

或, 较详细些

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{3a}$$

而只差一个较 Δx 为高级的无穷小量. 就是说 [**56** 段], 在 Δx 足够小的时候, 这个等式的相对误差可以任意小.

这种情形也可以从图 37 微分的几何解释中直接看出. 从图像上可以看出: 我们若将曲线的纵坐标的增量换成切线的纵坐标的增量, 则当 Δx 越小的时候, 这一替换的相对准确度也就越大.

用 dy 来替换 Δy 的好处是在于 (大约读者也清楚) dy 是线性地依赖于 Δx, 而 Δy 却常常是 Δx 的较复杂的函数.

若假定 $\Delta x=x-x_0$, 而 $x_0+\Delta x=x$, 则等式 (3a) 就成为

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0)$$

或

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

依照这个公式, 对于接近于 x_0 的值 x, 函数 $f(x)$ 就可以用一线性函数来近似地替换. 在几何上, 这就相当于把曲线 $y=f(x)$ 上接近于点 $(x_0,f(x_0))$ 的一小段换成曲线在这点的切线:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)^{①}$$

上的一段 (参看图 37), 为了简单起见, 取 $x_0=0$, 而且把 x 限于微小的值, 于是就有近似公式:

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

①实际上, 斜率为 k、经过点 (x_0,y_0) 的直线的方程是

$$y=y_0+k(x-x_0);$$

在切线的情形, 这里应当令 $y_0=f(x_0),k=f'(x_0)$.

由此, 用各种初等函数来代替这里的 $f(x)$, 就容易得到一系列的公式:

$$(1+x)^{\mu} \approx 1+\mu x, \quad \text{特例} \quad \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x,$$
$$e^{x} \approx 1+x, \quad \ln(1+x) \approx x, \quad \sin x \approx x, \quad \tan x \approx x, \quad \text{余类推},$$

其中有许多是我们早已知道了的.

94. 微分在估计误差中的应用 应用微分概念于近似计算中估计误差是非常方便而且自然的. 例如, 设量 x 我们可以直接地量度或计算, 而依赖于 x 的量 y 则以公式 $y=f(x)$ 来确定. 在量度量 x 的时候通常会有个误差 Δx, 由它又引起了量 y 的误差 Δy. 由于这些误差是微小的量, 所以可以假定

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

就是用微分来代替增量, 设 δx 是量 x 的最大绝对误差: $|\Delta x| \leqslant \delta x$ (在通常的条件下, 在量度中类似的误差限度是已知的). 于是显然可以取

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x \tag{8}$$

作为 y 的最大绝对误差 (误差限度).

1) 例如, 假若要去确定一个球的体积, 首先 (用游标卡尺、测厚仪、千分尺, 等等) 直接地测量球的直径 D, 再依公式

$$V=\frac{\pi}{6}D^{3}$$

去计算体积 V.

因为 $V'_D=\frac{\pi}{2}D^2$, 所以在这一情形, 根据 (8)

$$\delta V=\frac{\pi}{2}D^{2}\cdot\delta D.$$

用前式除这个等式, 得

$$\frac{\delta V}{V}=3\frac{\delta D}{D},$$

所以算出来的体积的数值的 (最大的) 相对误差比量出来的直径的数值的 (最大的) 相对误差增加了两倍.

2) 假设要计算数 x 的以十为底的对数 $y=\lg x$, 若在得到 x 时有某些误差, 则影响到对数 y, 使它也有了误差.

在这里 $y'_x=\frac{M}{x}(M\approx 0.4343)$, 因此, 依公式 (8),

$$\delta y = 0.434\,3\frac{\delta x}{x}.$$

这样, x 的对数 y 的 (最大) 绝对误差就只依赖于数 x 本身的 (最大) 相对误差而确定. 反过来也是一样.

这个结果有多种应用. 例如, 借此可以获得关于常用的标度为 25 cm = 250 mm 的对数尺的准确度的概念. 由于在放置照准器或读数时可能发生错误, 例如, 在这边或另一边错误 0.1 mm, 于是在对数上就对应有误差

$$\delta y=\frac{0.1}{250}=0.000\,4.$$

由此, 依我们的公式

$$\frac{\delta x}{x}=\frac{0.000\,4}{0.434\,3}\approx 0.001.$$

读数的相对准确度在算尺的所有部分都是一样的!

§3. 高阶导数及高阶微分

95. 高阶导数的定义 若函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $\mathscr{X}$ 内有有限的导数 $y'=f'(x)$, 那么后者本身就是 x 的另一函数, 于是有可能这个函数在 $\mathscr{X}$ 内的某点 x_0 有有限的或无穷的导数. 它就叫做函数 $y=f(x)$ 在该点处的二阶导数并用下列符号之一来表示:

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'',\quad D^2y;\quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad f''(x_0),\quad D^2f(x_0).$$

例如, 像我们在 **78** 段中已经见到的, 动点的速度 v 等于它所经过的路程 s 对于时间 t 的导数: $v=\frac{ds}{dt}$, 而加速度 a 是速度 v 对于时间的导数: $a=\frac{dv}{dt}$. 就是说, 加速度是路程对于时间的二阶导数: $a=\frac{d^2s}{dt^2}$.

类似地, 若函数 $y=f(x)$ 在整个区间 $\mathscr{X}$ 内 (即是, 在这个区间内的每一点处) 都有有限的二阶导数, 则这个二阶导数在 $\mathscr{X}$ 内某点 x_0 处有有限的或无穷的导数就叫做函数 $y=f(x)$ 在这点的三阶导数, 并记成:

$$\frac{d^3y}{dx^3},\quad y''',\quad D^3y;\quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\quad f'''(x_0),\quad D^3f(x_0).$$

用相似的方法可从三阶导数推出四阶导数, 等等. 若假定 $(n-1)$ 阶导数的概念已经定义了, 而在区间 $\mathscr{X}$ 内 $(n-1)$ 阶导数存在并且有限, 那么它在这个区间内某点 x_0 处的导数就叫做原来的函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数; 我们采用以下符号来记它:

$$\frac{d^ny}{dx^n},\quad y^{(n)},\quad D^{(n)}y;\quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\quad f^{(n)}(x_0),\quad D^nf(x_0).$$

有时 —— 在应用拉格朗日或柯西的记号时 —— 可能有必要去指出对于哪个变量在取导数, 那时就将这个变量写成下标的形式:

$$y''_{x^2},\quad D^3_{x^3}f(x),\quad f^{(n)}_{x^n}(x_0),\quad \text{余类推},$$

其中 $x^2, x^3, \cdots$ 我们规定是 $xx, xxx, \cdots$ 的简写. 例如, 可以写: $a=s''_{t^2}$.

(读者明白, 这里的整个符号

$$\frac{d^nf}{dx^n},\quad f^{(n)}\quad \text{或}\quad f^{(n)}_{x^n},\quad D^nf\quad \text{或}\quad D^n_{x^n}f$$

可以看作是函数的记号.)

这样, 我们依着阶次从一阶导数推移到以后各阶导数, 而归纳地定义了 n 阶导数的概念. 从而确定 n 阶导数的关系式

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

就叫做递推式 (或 "循环式"), 由于它使我们从 n 阶导数 "回归" 到 $(n-1)$ 阶导数.

当 n 给定了时, n 阶导数的计算可以按照读者已知的法则与公式去进行.

例如, 设

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2},$$

则

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3}, \quad y'' = 6x^2 - x + 4,$$
$$y''' = 12x - 1, \quad y'''' = 12,$$

于是所有以后各阶的导数都恒等于零. 或设

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

于是

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}, \text{ 等等.}$$

注意, 像对于高阶导数那样, 也可以归纳地建立高阶单侧导数的概念 [参看 **86** 段]. 若函数 $y = f(x)$ 只确定在某一区间 $\mathscr{X}$ 内, 那么当我们谈到在这区间端点的任何阶导数的时候, 总是指的是单侧导数.

96. 任意阶导数的普遍公式 要计算任何函数的 n 阶导数, 一般地说, 应该先要算出它前面的一切阶次的导数. 然而, 在许多情形下, 对于 n 阶导数却能够建立起这样的普遍表达式, 它直接依赖着 n, 而不再含有前面各阶导数.

在推导这种普遍表达式的时候, 有时公式

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

是有用处的, 它们是读者已经知道的 **83** 段中法则 I 及 II 在高阶导数的情况下的推广, 只要逐次地应用这些法则就很容易得到它们.

1) 首先考虑幂函数 $y = x^\mu$, 其中 μ 是任意实数. 我们依次地有:

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \cdots,$$

由此也容易看出普遍的规律:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

并且可以用数学归纳法来证明它.

例如, 若取 $\mu=-1$, 则得

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

当 μ 本身是自然数 m 的时候, 则 x^m 的 m 阶导数就已经是常数 $m!$, 于是一切以后的导数就都是零了. 由此很明显, 对于 m 次的整多次式也会发生类似的状况.

2) 现在设 $y=\ln x$. 首先有

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

从这里我们把 1) 中对应公式里的 n 换成 $n-1$, 并用它来取上式的 $(n-1)$ 阶导数, 于是我们得到

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) 设 $y=a^x$, 则

$$y'=a^x\cdot\ln a,\quad y''=a^x\cdot(\ln a)^2,\cdots,$$

普遍公式

$$y^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n,$$

这容易用数学归纳法来证明.

特例, 显然有

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

4) 假定 $y=\sin x$, 于是

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,$$
$$y''''=\sin x,\quad y^{(5)}=\cos x,\cdots,$$

沿着这一路线去找所求的 n 阶导数的普遍表达式是困难的. 但是若把一阶导数的公式改写成为 $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的形式之后, 事情就会立刻化简多了; 容易明白, 在每微分一次时变元就要增加 $\frac{\pi}{2}$, 因此

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

类似地可得到公式

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5) 再讨论函数 $y = \arctan x$. 我们提出的问题是要把 $y^{(n)}$ 用 y 表示出来. 因为 $x = \tan y$, 于是

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

再关于 x 来微分 (记住, y 是 x 的函数), 得到

$$\begin{aligned} y'' &= \left[-\sin y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' \\ &= \cos^2 y \cdot \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

再一次微分得出:

$$\begin{aligned} y''' &= \left[-2\sin y \cdot \cos y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2 y \cdot \cos 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' \\ &= 2\cos^3 y \cdot \cos\left(3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y \cdot \sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

普遍公式

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

可用数学归纳法证明是正确的.

97. 莱布尼茨公式 我们在前一段的开始曾经指出, **83** 段的法则 I 与 II 是可以直接移用到任意阶导数上去的, 然而对于有关乘积的微分的法则 III 来说, 事情就复杂多了.

假定 u, v 是 x 的函数, 且各自具有直到 n 阶的导数. 我们要证明, 这时它们的乘积 $y = uv$ 也有 n 阶导数, 而且去求出它们的表达式.

应用法则 III, 逐次微分这个乘积, 我们求得:

$$\begin{aligned} &y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ &y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \cdots. \end{aligned}$$

很容易看出构成所有这些公式的规律: 它们的右边很像是二项式的各次幂 $u + v, (u+v)^2, (u+v)^3, \cdots$ 的展开式, 只不过是把 u, v 的幂换成对应阶的导数罢了. 若是在所得的公式内再把 u, v 写成 $u^{(0)}$, $v^{(0)}$, 那么它们之间的相似就更为完全了. 推广这个规律到任意 n 的情形, 我们就得到普遍公式①:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$$

①符号 $\sum$ 表示同类项的总和. 当这些项都依赖着一个标号, 而这个标号是在确定了的界限内变动着时, 那么就在 $\sum$ 的上面和下面指出这些界限来. 例如,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \\ &\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \quad \text{等等}. \end{aligned}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i}u^{(n-i)}v^{(i)} + \cdots + uv^{(n)}. \tag{1}$$

我们再用数学归纳法来证明公式 (1) 的正确性. 假设在某值 n 时, 公式 (1) 是对的, 又若函数 u, v 的 $(n+1)$ 阶导数也都存在, 那么可以把 (1) 式对于 x 再微分一次, 我们就得到:

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)}v^{(i)}]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)}v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)}v^{(i+1)}.$$

现在把包含在最后的两个总和内的各同类项, 即是包含函数 u, v 的同阶导数乘积的项归并起来 (容易看出, 在每一个乘积内, 两个导数的阶数的和始终是等于 $n+1$). 乘积 $u^{(n+1)}v^{(0)}$ 只包含在第一个总和内 (当 $i=0$ 时); 在这个总和内它的系数是 $C_n^0 = 1$. 完全同样, $u^{(0)}v^{(n+1)}$ 只包含在第二个总和内 (有序号 $i = n$ 的一项); 它的系数是 $C_n^n = 1$. 包含在这两个总和内的所有其余的乘积的形式都是 $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$, 其中 $1 \leqslant k \leqslant n$. 每一个这样的乘积不但在第一个总和内可以遇到 (有序号 $i = k$ 的一项), 而且在第二个总和内也可以遇到 (有序号 $i = k-1$ 的一项). 对应的系数的和就是 $C_n^k + C_n^{k-1}$. 但是, 大家都知道,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

这样, 最后求出:

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(n+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{[(n+1)-k]}v^{(k)}.$$

因为

$$C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1.$$

我们已经得到 $y^{(n+1)}$ 的表达式, 它完全类似于表达式 (1)(只是 n 换成了数 $n+1$); 由此就证明了公式 (1) 对于一切自然数 n 的正确性.

上面证得的公式叫做*莱布尼茨公式*. 在推导 n 阶导数的普遍表达式时它经常是有用处的.

我们要指出, 对于多因子的乘积 $y = uv\cdots t$ 的 n 阶导数也可以建立像这样的公式, 它与多项式幂 $(u+v+\cdots+t)^n$ 的展开式形状是相类似的.

例 求函数

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

的 n 阶导数的普遍式. 根据莱布尼茨公式, 得到

$$y^{(n)} = e^{ax} \cdot a^n \cdot \sin bx + ne^{ax} \cdot a^{n-1}b \cdot \cos bx - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{ax} \cdot a^{n-2}b^2 \cdot \sin bx$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{ax} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \cdot \cos bx + \cdots,$$

或

$$y^{(n)} = e^{ax} \left\{ \sin bx \left[a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \cdots \right] \right.$$
$$\left. + \cos bx \left[na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots \right] \right\}.$$

98. 高阶微分 现在我们回到高阶微分; 它们也同样是归纳地来定义的. 函数 $y = f(x)$ 的 (一阶) 微分在某一点处的微分就叫做函数在这点的二阶微分, 记作

$$d^2y = d(dy).$$

二阶微分的微分叫做三阶微分:

$$d^3y = d(d^2y).$$

一般地说, 函数 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶微分的微分叫做它的 n 阶微分:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

如果应用函数符号, 那么各阶微分就可以表示为

$$d^2f(x_0), \quad d^3f(x_0), \quad \cdots, \quad d^nf(x_0), \cdots,$$

并且这种符号还能够指出这些微分是在 x 的那一个特别值 $x = x_0$ 处而取的.

在计算高阶微分的时候, 很重要的一件事是要记住: dx 是任意的与 x 无关的数, 在对 x 微分时必需要把 dx 看作常数因子. 这样我们就有 (假定对应的导数总是存在的):

$$d^2y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y'' \cdot dx) \cdot dx = y''dx^2,$$
$$d^3y = d(d^2y) = d(y'' \cdot dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = (y''' \cdot dx) \cdot dx^2 = y'''dx^3,\text{①}$$

等等, 我们猜想普遍的规律会是

$$d^ny = y^{(n)}dx^n, \tag{2}$$

用数学归纳法也很容易来证明它. 由此得出

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

① $dx^2, dx^3, \cdots$ 等等恒理解为微分的幂: $(dx)^2, (dx)^3, \cdots$. 而幂的微分就记作: $d(x^2), d(x^3), \cdots$.

于是以后就可以把这个符号看作分数了.

利用等式 (2), 很容易把莱布尼茨公式改写成微分的形式. 只要将它的两边乘上 dx^n, 就可得出

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u \cdot d^i v \quad (d^0u = u, d^0v = v).$$

莱布尼茨本人求得的公式正是这个形式.

99. 高阶微分形式不变性的破坏 回想起函数的一阶微分具有形式不变性的性质的时候, 很自然地就会提出这个问题: 高阶微分是否也有同样的性质呢? 我们就来指出, 例如, 二阶微分就已经没有这个性质了.

因此, 设 $y = f(x)$ 而 $x = \varphi(t)$, 于是 y 可以看作是 t 的复合函数: $y = f(\varphi(t))$. 它对 t 的 (一阶) 微分可以写为 $dy = y'_x \cdot dx$, 此处 $dx = x'_t \cdot dt$ 是 t 的函数. 再求对 t 的二阶微分:

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx).$$

对于 dy'_x 可以再应用 (一阶) 微分形式的不变性化成: $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$, 于是最后得到

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \tag{3}$$

但是当 x 是自变量时, 二阶微分的形式却是 $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$. 当然, 式 (3) 是 d^2y 的更普遍的表达式: 若在特殊情形取 x 为自变量, 则 $d^2x = 0$ —— 于是就只剩下第一项了.

今举一例. 设 $y = x^2$, 于是, 当 x 是自变量时:

$$dy = 2x \cdot dx, \quad d^2y = 2dx^2.$$

现在又令 $x = t^2$, 于是 $y = t^4$, 而

$$dy = 4t^3dt, \quad d^2y = 12t^2dt^2.$$

dy 的新的表达式也可以从旧的得到, 只要将 $x = t^2, dx = 2tdt$ 代入旧的就行. 然而对于 d^2y, 情形却大不相同: 作了同样的代入之后, 我们得到的是 $8t^2dt^2$ 而非 $12t^2dt^2$!

这时公式 (3) 的形式是

$$d^2y = 2dx^2 + 2xd^2x.$$

在这里代入 $x = t^2, dx = 2tdt, d^2x = 2dt^2$, 这就得出正确的结果 $12t^2dt^2$.

因此, 若 x 不再是自变量时, 则二阶微分 d^2y 就要用 x 的微分的二项式 (3) 来表示. 对于自三阶以后的各阶微分, 增补的项数 (当另取他量作新的自变量时) 就还要增加. 按照这个道理, 在用微分来表示高阶导数的式

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots \tag{4}$$

中, 这些微分已经不能对于任意变量取了, 而仅能对于变量 x 而取.

第六章　微分学的基本定理

§1. 中值定理

100. 费马定理　由知道了某一函数的导数 (或一系列的导数) 就能够对函数本身的性态做出结论. 本章内要讲到的一些简单而又重要的定理及公式就是导数概念各种应用的基础 (参看第七章与第十三章).

我们先从一个辅助命题开始, 这命题可以正确地以费马命名[①]. 当然费马并没有得出这个命题的下面的形式 (他并不曾有导数的概念), 不过这个命题在实质上却完全是重复了费马寻求函数的最大及最小值时所用的方法 (参看第十四章).

费马定理　*设函数 $f(x)$ 定义在某一区间 $\mathscr{X}$ 内, 并且在这个区间的***内点** *c 取最大 (最小) 值. 又若在这点存在着有限导数 $f'(c)$, 则必然 $f'(c)=0$.*

证明　为了确定起见, 设 $f(x)$ 在点 c 取最大值, 于是对于 $\mathscr{X}$ 内的一切 x 就有

$$f(x) \leqslant f(c).$$

由导数定义:

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

并且这一极限与 x 是从右边还是从左边趋向 c 无关. 但是在 $x>c$ 时, 表达式

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0,$$

①彼埃尔·费马 (1601—1665) 是位卓越的法国数学家, 他与无穷小量分析的史前史是有密切的关系的 (参看第十四章).

于是当 $x \to c+0$ 时求极限即得:

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{1}$$

又若 $x<c$ 时, 则

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0,$$

在 $x \to c-0$ 时取极限, 又可求得

$$f'(c) \geqslant 0. \tag{2}$$

比较式 (1) 及 (2), 就可得出所求的结论

$$f'(c)=0.$$

附注 上面的论证其实还证明了另一点: 即在所述点 c 不能够存在 (双侧) 无穷导数. 因此, 只要假定了在这点 (双侧) 导数存在, 而不必附加有限的这一条件, 定理的结论仍是正确的.

我们记得 [**77**、**78** 段] 导数 $y'=f'(x)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 的切线的斜率. 所以 $f'(c)$ 等于零在几何上表示这曲线上的对应点处的切线是平行于 x 轴的. 图 38 很明显地表示出这个情况.

证明中用到的 c 是区间的一个内点这一假定, 是本质的, 因为我们必须同时考虑在 c 右边的点 x 和在 c 左边的点 x. 没有这一假定, 定理就不会成立: 设函数 $f(x)$ 定义在闭区间内, 并且在这个区间的一个端点上达到它的最大 (最小) 值, 则在这一端点上导数 $f'(x)$ (若存在) 可能不是零. 我们建议读者自己去找出一个适当的例子.

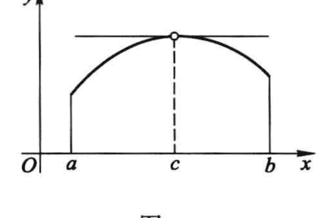


图 38

101. 罗尔定理 下面这个简单而又重要的以罗尔① 命名的定理是微分学及其应用的许多定理及公式的基础.

罗尔定理 设: 1) 函数 $f(x)$ 定义于闭区间 $[a,b]$ 上并于其上连续; 2) 至少在开区间 (a,b)② 内有限导数 $f'(x)$ 存在; 3) 在区间的端点上函数值相等: $f(a)=f(b)$.

那么在 a 与 b 之间一定可以找到这样的一个点 c $(a<c<b)$ 使得 $f'(c)=0$.

证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的, 因此由魏尔斯特拉斯第二定理 [**73** 段] $f(x)$ 在这区间上必定有它的最大值 M 和最小值 m.

考虑两种情形:

①米歇尔 · 罗尔 (1652—1719) 是法国数学家, 他在很长的一段时期内却是新计算法的反对者, 一直到了暮年才归附于这种新计算法. 本文里所引的定理是罗尔发表的, 但他也只是对多项式证明了这个定理.

②当然, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的连续性已可从 2) 推出, 但是我们无论在这里或在以后都不打算把定理的条件拆开成为互相独立的假定.

1. $M = m$. 这时 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒为常量: 事实上, 这时由不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 得出在一切 x 处 $f(x) = M$; 因此在整个区间上 $f'(x) = 0$, 于是可以取 (a,b) 内任意一点作为 c.

2. $M > m$. 我们知道, 函数必定可以取得这两个值, 但是, 由于 $f(a) = f(b)$, 所以函数不可能都在区间的端点上取得这两个值, 而至少其中有一个值是在 a 与 b 之间的某一点 c 上取得的. 这时, 由费马定理可以推得, 在这点的导数 $f'(c)$ 就会是零. 定理得证.

用几何的语言来说, 罗尔定理表示着: 如果曲线 $y = f(x)$ 的两端的纵坐标相等, 那么一定可以在曲线上找到一点, 在这一点的切线是平行于 x 轴的 (图 39).

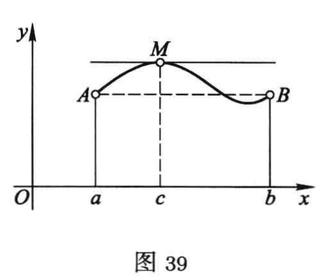


图 39

注意, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续性以及在整个开区间 (a,b) 内存在着导数这些条件对于定理的结论的正确性来说是本质性的. 函数 $f(x) = x - E(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上除了在 $x = 1$ 时有间断以外, 它满足定理的其他的一切条件, 但在 $(0,1)$ 内却处处 $f'(x) = 1$. 由等式

$$f(x) = \begin{cases} x & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}\right), \\ 1 - x & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right) \end{cases}$$

确定的函数在区间 $[0,1]$ 上除了当 $x = \dfrac{1}{2}$ 时 (双侧) 导数不存在外, 它也满足其他的一切条件; 可是在左半区间内 $f'(x) = +1$, 在右半区间内 $f'(x) = -1$.

定理的条件 3) 也是同样地重要的: 函数 $f(x) = x$ 在区间 $[0,1]$ 上除了条件 3) 以外满足其他的一切条件, 但它的导数到处是 $f'(x) = 1$.

请读者画出图形.

102. 有限增量定理 我们来讨论罗尔定理的一些直接推论. 第一个就是下面的拉格朗日的有限增量定理.

拉格朗日定理 设: 1) 函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上并在其上连续, 2) 至少在开区间 (a,b) 内有有限导数 $f'(x)$ 存在. 那么在 a 与 b 之间一定可以找到这样的一个点 c $(a < c < b)$ 满足等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{3}$$

证明 引入在 $[a,b]$ 上由等式

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

来定义的辅助函数. 这个函数满足罗尔定理的一切条件. 事实上, 它在 $[a,b]$ 上连续, 因为它是连续函数 $f(x)$ 与一线性函数之差. 它在区间 (a,b) 内有确定的有限导数,

等于

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

最后, 把 a, b 直接代入 $F(x)$, 证实 $F(a) = F(b) = 0$, 即是, $F(x)$ 在区间的两端取得等值.

因此, 可以把罗尔定理应用于函数 $F(x)$, 而肯定在 (a, b) 内有这样的一点 c 存在, 使得 $F'(c) = 0$. 这样

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \quad \text{由此} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

这就是所要证明的.

罗尔定理是拉格朗日定理的一个特殊情形; 前面所作的关于条件 1) 与 2) 的附注在这里仍是有效的.

我们再来谈谈拉格朗日定理的几何意义 (图 40), 注意, 比值

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

是割线 AB 的斜率, 而 $f'(c)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上横坐标 $x = c$ 的点的切线的斜率. 这样, 拉格朗日定理中的论断就相当于: 在 AB 弧上至少总可找到一点 M, 在这点的切线和 AB 弦平行.

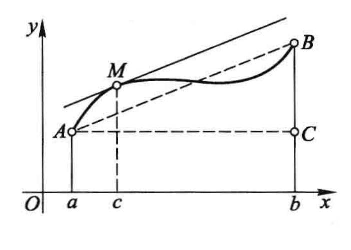


图 40

已证明的公式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{或} \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

叫做*拉格朗日公式*或*有限增量公式*. 显然, 它在 $a > b$ 时仍然有效.

在区间 $[a, b]$ 上取一个任意量 x_0, 并给 x_0 以增量 $\Delta x \gtrless 0$, 并使 $x_0 + \Delta x$ 不超出区间以外. 当 $\Delta x > 0$ 时应用拉格朗日公式于区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$, 当 $\Delta x < 0$ 时, 应用这一公式于 $[x_0 + \Delta x, x_0]$. 于是拉格朗日公式就成为:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c) \tag{3a}$$

或

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x. \tag{4}$$

这时, 介于 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间的数 c 可以表示为

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \quad \text{其中} \quad 0 < \theta < 1^{①}.$$

①有时说, θ 是个 "真分数"; 但是却不要就以为它一定是有理分数, 数 θ 也可能是无理数.

这个等式给出在变元的任意有限增量 Δx 时的函数增量的准确表达式, 它自然是与近似等式 [**93** 段 (3a)]

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

相对立的, 在近似等式中只有当 Δx 是无穷小量时, 相对误差方才趋向于零. 因此之故, 就在公式 (或定理) 的名称中安上了 "有限增量" 这几个字.

至于拉格朗日公式的缺点, 那就是在这个公式里有个我们所不知道的数 c (或 θ)①. 但是这并不影响这一公式在分析中的多方面的应用.

103. 导数的极限 下面的附注就给出这种应用的一个有用的例子. 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + H] (H > 0)$ 上连续, 并且在 $x > x_0$ 时有有限的导数 $f'(x)$. *又若存在着* (有限或无穷) *极限*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = K,$$

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数也等于 K. 事实上, 在 $0 < \Delta x \leqslant H$ 时, 等式 (3a) 成立. 因为导数 $f'(c)$ 的变元 c 包含在 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间, 所以当 $\Delta x \to 0$ 时, $c \to x_0$, 于是等式 (3a) 的右边, 从而左边就趋向于极限 K, 这就是所要证明的. 对于点 x_0 的左边邻域也可建立类似的论断.

作为例子, 考虑在区间 $[-1, 1]$ 上的函数

$$f(x) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

若 $-1 < x < 1$, 则依微分学的一般法则容易求得:

$$f'(x) = \arcsin x.$$

当 $x \to 1 - 0$ $(x \to -1 + 0)$ 时, 这一导数显然趋向于极限 $\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 因此在 $x = \pm 1$ 时存在着 (单侧) 导数: $f'(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$.

如果回到我们在 **87** 段中曾经考虑过的函数 $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}, f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 上来, 那么对于它们 (在 $x \geqslant 0$ 时) 就有:

$$f_1'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \quad f_2'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

因为第一个式子在 $x \to 0$ 时趋向于 $+\infty$, 而第二个在 $x \to \pm 0$ 时分别有极限 $\pm\infty$, 于是我们立刻就可以下结论, $f_1(x)$ 在点 $x = 0$ 有双侧导数 $+\infty$, 但同时对于 $f_2(x)$ 来说, 在这点只存在着单侧导数: 右导数是 $+\infty$, 左导数是 $-\infty$.

由上所述就可推得, 若有限导数 $f'(x)$ 在某一区间内存在, 则它本身也是一个函数, 且这一函数不能有通常的间断或跃度: 在每一点处, 它或是连续, 或有第二类间断 [参看 **88** 段, 2°].

104. 有限增量定理的推广 柯西用以下的方法推广了上一段的有限增量定理.

柯西定理 *设: 1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 2) 至少在开区间 (a, b) 内有限导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在, 3) 在区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$.*

---

①仅在不多的情形中我们可以确定它; 例如, 对于二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 很易验证 θ 总是等于 $\frac{1}{2}$.

那么在 a 与 b 之间一定可以找到这样的一点 c, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5}$$

这个公式叫做柯西公式.

证明 我们先来证明: 等式左边的分母不等于零, 因为否则这个表达式就没有意义了. 假若 $g(b)=g(a)$, 则依罗尔定理, 导数 $g'(x)$ 在区间内的某一点就会等于零, 而这是与条件 3) 相矛盾的; 因此 $g(b)\neq g(a)$.

现在考虑辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

这个函数满足罗尔定理的一切条件. 实际上, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的, 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续的; 导数 $F'(x)$ 在 (a,b) 内存在, 而且就等于

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

最后, 直接代入 a 与 b, 证得 $F(a)=F(b)=0$. 应用罗尔定理, 就得出, 在 a 与 b 之间一定存在点 c, 使得 $F'(c)=0$. 换句话说,

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0,$$

或

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c).$$

除以 $g'(c)$[这是可以的, 因为 $g'(c)\neq 0$], 就得到所求的等式.

很明显的, 拉格朗日定理是柯西定理的一个特殊情形. 要从柯西公式得出拉格朗日的有限增量公式, 只需令 $g(x)=x$ 就行了.

101、102 及 **104** 诸段中在导数符号里有自变量的某个中值出现, 这个值 —— 我们曾经指出过 —— 一般地说来我们是不知道的. 它也会在某种意义上给予导数一个中值. 由于这个缘故, 这里的这些定理就都叫做 “中值定理”.

§2. 泰勒公式

105. 多项式的泰勒公式 若 $p(x)$ 是 n 次多项式:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n, \tag{1}$$

把它逐次地微分 n 次:

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1},$$
$$p''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \cdots + (n-1)n \cdot a_n a^{n-2},$$
$$p'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1)n \cdot a_n x^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n \cdot a_n,$$

并且在一切这些式子内令 $x=0$, 就得出用多项式本身及其导数在 $x=0$ 处的值去表示这多项式的系数的式子:

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \quad \cdots, \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

把这些系数的值代入 (1):

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

这个公式与 (1) 式只在系数的写法上不同.

我们也可以不依 x 幂去展开多项式, 而依 $(x-x_0)$ 幂去展开, 此处 x_0 是 x 的某一个特别的常数值:

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \cdots + A_n(x-x_0)^n. \tag{3}$$

令 $x - x_0 = \xi$, 而 $p(x) = p(x_0+\xi) = P(\xi)$, 对于多项式

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \cdots + A_n\xi^n$$

的系数, 根据已证明的式子, 有表达式:

$$A_0 = P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},$$
$$A_3 = \frac{P'''(0)}{3!}, \quad \cdots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

但是

$$P(\xi) = p(x_0+\xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0+\xi),$$
$$P''(\xi) = p''(x_0+\xi), \quad \cdots,$$

于是

$$P(0) = p(x_0), \quad P'(0) = p'(x_0), \quad P''(0) = p''(x_0), \quad \cdots$$

而

$$\left.\begin{aligned} A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}, \\ A_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}, \quad \cdots, \quad A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

即展开式 (3) 的系数可用多项式本身及其导数在 $x = x_0$ 处的值来表达.

把 (4) 式代入 (3):

$$\begin{aligned} p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \tag{5}$$

公式 (5) 以及它的特别情形 (在 $x_0 = 0$ 时)(2) 都叫做泰勒公式. 不过公式 (2) 也常叫做麦克劳林公式[①]. 泰勒公式在代数上的重要的应用是大家都知道的.

这里我们提出 (对以后是有用处的) 一个明显的附注, 若多项式 $p(x)$ 表示为这一形式

$$\begin{aligned} p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x-x_0) + \frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

则必有

$$p(x_0) = c_0, \quad p'(x_0) = c_1, \quad p''(x_0) = c_2, \quad \cdots, \quad p^{(n)}(x_0) = c_n.$$

106. 任意函数的展开式 现在回头来考虑一般并不是多项式的任意函数 $f(x)$, 它定义在某一个区间 $\mathscr{X}$ 内. 假定 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 中的某一点 x_0 有直到 n 阶为止的各阶导数存在. 也就是, 说得确切些, 函数在点 x_0 的某一邻域内有直到 $(n-1)$ 阶为止的各阶导数:

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad \cdots, \quad f^{(n-1)}(x),$$

此外, 它在这点 x_0 还有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$[②]. 于是, 按照 (5) 的形式, 对于函数 $f(x)$ 也可以作出一个多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \tag{6}$$

根据前段的附注, 这个多项式及其导数 (直到 n 阶为止) 在点 x_0 与函数 $f(x)$ 及其导数有相同的值.

---

①布鲁克 · 泰勒 (1685—1731) 与柯林 · 麦克劳林 (1698—1746) 都是英国数学家, 是牛顿的继承人.

②如果点 x_0 是区间 $\mathscr{X}$ 的端点之一, 则在谈到在这点的导数的时候, 我们是指的单侧导数而言; 完全同样地, 这时对于点 x_0 的邻域这一名词也是指的是单侧邻域.

但是在这一次只要函数 $f(x)$ 不是 n 次多项式, 就已经不能肯定等式 $f(x) = p_n(x)$ 了, 所以多项式 $p_n(x)$ 仅给出函数 $f(x)$ 的某一逼近式, 利用 $p_n(x)$ 可以在某种准确度内算出 $f(x)$. 因而对于在给定的 ($\mathscr{X}$ 中) x 与给定的 n 时差

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x),$$

或者

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{7}$$

的估计就成为重要的事情了.

为了这个目的, $r_n(x)$ 的这一表达式是不太合用的. 要想把它表示为较便于研究的形式, 除了为做成多项式 $p_n(x)$ 时所直接需要条件外, 我们还需给函数 $f(x)$ 以更强的条件, 就是我们假设今后 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 内有直到 $(n+1)$ 阶为止的各阶导数

$$f'(x), \quad f''(x), \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x), \quad f^{(n+1)}(x)$$

存在.

我们现在把区间 $\mathscr{X}$ 内的一个任意值 x 固定下来, 再依照公式 (7) 右边的式样, 把常数 x_0 换成变量 z, 就做出了一个新的辅助函数:

$$\begin{aligned}\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x - z) - \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 \\ - \cdots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n,\end{aligned}$$

其中自变量 z 是算作只在区间 $[x_0, x]$[①] 上变动着的. 在这个区间上函数 $\varphi(z)$ 是连续的, 并且在它的端点取得数值 [参看 (7)]:

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0. \tag{8}$$

此外, 在区间 (x_0, x) 内存在着导数

$$\begin{aligned}\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x - z) - f'(z)\right] \\ - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x - z)\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x - z)^{n-1}\right],\end{aligned}$$

或经简化后,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n. \tag{9}$$

① 为确定起见, 我们就算作 $x > x_0$.

若再取一个任意的函数 $\psi(z)$, 它在闭区间 $[x_0, x]$ 上连续, 在开区间 (x_0, x) 内有不等于零的导数, 那么对于这一对函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 就可以应用柯西公式 [**104** 段]:

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间, 即是, $c = x_0 + \theta(x - x_0)(0 < \theta < 1)$. 考虑到 (8)、(9) 两式, 由此可得

$$r_n(x) = -\frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n. \tag{10}$$

先把函数 $\psi(z)$ 选成:

$$\psi(z) = (x - z)^{n+1},$$

它满足上面所说的一些条件. 我们有

$$\psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}, \quad \psi(x) = 0, \quad \psi'(c) = -(n+1)(x - c)^n.$$

代入 (10) 中, 最后得出:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{11}$$

现在, 考虑到 (7) 与 (11), 函数 $f(x)$ 就可以表示为

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned} \tag{12}$$

它与多项式的泰勒公式不同的地方就是它刚好多出一个余项(11).

余项式 (11) 是拉格朗日的余项式; 这一形式的余项很像泰勒公式中接下来的一项: 只是把原来接下来的一项中的 $(n+1)$ 阶导数不取于 x_0 处, 而取在某一中值 (在 x_0 与 x 之间) c 处.

公式 (12) 叫做*有拉格朗日型余项的泰勒公式*. 若在式内把 $f(x_0)$ 移至左边且令 $x - x_0 = \Delta x$, 则 (12) 式可重写为:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \end{aligned} \tag{12a}$$

这一公式是*有限增量公式* [**102** 段, (4)]

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x$$

的直接推广, 后式相当于 (12a) 中的 $n=0$ 时.

虽然拉格朗日型余项就其简单而言是不能再好的了, 但在个别情形下这个形式对估计余项不太适用, 因而必须改用别的略为复杂的形式. 这里我们要提到其中之一的柯西型余项. 若这次令 $\psi(z)=x-z$, 它可从 (10) 式推得. 这时

$$\psi(x_0)=x-x_0,\quad \psi(x)=0,\quad \psi'(c)=-1,$$

又因为

$$(x-c)^n=[x-x_0-\theta(x-x_0)]^n=(1-\theta)^n(x-x_0)^n,$$

则得出这样的最后的表达式

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}. \tag{13}$$

与拉格朗日型相比较, 虽然这一形式的分母中少了个因子 $(n+1)$, 但是却多了个因子 $(1-\theta)^n$, 这使得它有时又很有用处.

我们看出, 有各种形式余项的泰勒公式是中值定理的变形: 这里也同样出现了 c 和 θ!

107. 余项的其他形式 当我们要想在 x 的某个不等于 x_0 的固定值处用多项式 $p_n(x)$ 来近似地替代函数 $f(x)$, 而且还把由此而产生的误差作个数值上的估计时, 在这种情况下上面得出的在泰勒公式中的一些余项形式就可适用. 但是也常有这样的时候, 我们对于 x 的某些定值并不感兴趣, 而觉得重要的倒是在于当 $x\to x_0$ 时余项的状态, 准确点说, 重要的是关于余项的无穷小量的阶. 这个阶数即使在某些较弱的条件下也还是可以决定的. 就是, 假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 (双侧或单侧) 只有 n 个逐阶导数

$$f'(x),\quad f''(x),\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)$$

存在着, 而且最后的 $f^{(n)}(x)$ 在点 x_0 连续①. 这时, 在公式 (12) 中以 $(n-1)$ 代替 n, 可以写出:

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)&+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\&+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,\end{aligned}$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间, 令最后一项中的

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x); \tag{14}$$

因为当 $x\to x_0$ 时, 显然地也有 $c\to x_0$, 于是 (根据连续性的假定)$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$, 则 $\alpha(x)\to 0$, 而 $\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$. 最后, 得出:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n); \tag{15}$$

① 其实只要假定导数 $f^{(n)}(x_0)$ 在一点 $x=x_0$ 处存在. 我们为了便于求得结论, 加了较强的条件.

这样, 这一次

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), \tag{16}$$

即是, 关于余项式我们这里只知道, 在 n 为固定而 $x \to x_0$ 时它与 $(x-x_0)$ 比起来, 是一个高于 n 阶的无穷小量, 虽然 —— 要着重指出 ——没有一个固定的 x 在那里的 $r_n(x)$ 的值是我们知道了的. 余项式 (16) 是由佩亚诺[①]给出的.

我们见到, 公式 (15) 仅仅刻画出当 x 趋向于 x_0 时函数的状态, 所以事实上它是有一定的 "局部" 性的.

若在 (15) 中又把 $f(x_0)$ 移到左边且令 $x - x_0 = \Delta x$, 则得出展开式

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n), \tag{15a}$$

它是 **82** 段公式 (3):

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

的推广, 当 (15a) 中的 $n=1$ 时就得出后一公式.

有时为了方便起见, 就索性把 (14) 取成

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + \alpha(x);$$

此处当 $x \to x_0$ 时, 同样也有 $\alpha(x) \to 0$, 而有佩亚诺型余项的泰勒公式就可写为

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ + \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \tag{17}$$

最后还要提出以下的附注. 若在公式 (12a) 与 (15a) 中把 Δx 换成 dx, 再回想起

$$f'(x_0)dx = df(x_0), \quad f''(x_0)dx^2 = d^2f(x_0), \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x_0)dx^n = d^nf(x_0)$$

及

$$f^{(n+1)}(c)dx^{n+1} = d^{n+1}f(c),$$

则, 在代入 (12a) 与 (15a) 以后, 这两式就可表示为

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) \\ + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c) \quad (c = x_0 + \theta\Delta x, 0 < \theta < 1) \end{aligned} \tag{12b}$$

及

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0) + o(\Delta x^n). \tag{15b}$$

[①] 朱塞佩 · 佩亚诺 (1858—1932) 是意大利数学家.

这样, 若假定 $\Delta x \to 0$, 则函数的无穷小增量 $\Delta f(x_0)$ 由上面的这些公式就不仅可以分出它的主部 —— 第一阶微分, 而且也分出更高阶的无穷小量项, 它们 —— 除去其分母中的阶乘因子不论 —— 就是高阶微分

$$d^2 f(x_0), \quad \cdots, \quad d^n f(x_0).$$

108. 已得的公式在初等函数上的应用 若 $x_0 = 0$, 泰勒公式就显得最简单了①:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{18}$$

在把 $(x - x_0)$ 取作新的自变量之后, 一般的泰勒公式总可以化成这个特别情形.

我们考虑某些初等函数依这个公式的具体展开式.

1) 设 $f(x) = e^x$, 于是, 由 **96** 段, 3), 对于任何 $k = 1, 2, 3 \cdots$, $f^{(k)}(x) = e^x$. 因为在这时 $f(0) = 1, f^{(k)}(0) = 1$, 故依公式 (18),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

2) 若 $f(x) = \sin x$, 则 $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ [**96** 段, 4)], 于是

$$f(0) = 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$
$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots).$$

因此, 令公式 (18) 中 $n = 2m$, 就有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x).$$

3) 类似地, 在 $f(x) = \cos x$ 时 [**96** 段, 4)]

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f(0) = 1, \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m,$$
$$f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

这样 (若取 $n = 2m + 1$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} + r_{2m+1}(x)$$

4) 现在考虑幂函数 x^m, 其中 m 不是自然数也不是零. 在这个情形下, 当 $x \to 0$ 时, 若 $m < 0$ 则函数本身无限递增, 否则, 当导数的阶 $n > m$ 时, 导数会无限递增. 因此, 这里不能取 $x_0 = 0$.

①这一公式也以麦克劳林命名.

今取 $x_0 = 1$, 就是要把 x^m 依 $(x-1)$ 的幂来展开. 如前所述, 我们可以引用 $(x-1)$ 作为新的变量; 不过仍旧用 x 来记这一新变量, 于是也就是要把函数 $(1+x)^m$ 依 x 的幂来展开.

我们知道 [**96** 段, 1)],

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

因此

$$f(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

展开式的形式为

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot \;\cdots\; \cdot n}x^n + r_n(x).$$

5) 若转移到对数函数 $\ln x$ 上, 它在 $x \to +0$ 时趋向于 $-\infty$, 所以, 与前例一样, 我们就来考虑函数 $f(x) = \ln(1+x)$, 而且要把它依 x 的幂来展开.

这时 [**96** 段 2)]

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\text{①}$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

由此

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

6) 现在设 $f(x) = \arctan x$. 由 **96** 段, 5) 很容易得出它的导数在 $x = 0$ 处的值:

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

因此它的展开式可以表示成为这一形式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x).$$

109. 近似公式 · 例 若在公式 (18) 中弃去余项, 则得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

它以多项式来替代原来性质复杂的函数. 这个公式的性能可从两方面来估价: 或者通常用余项的拉格朗日形式来指出误差的限度:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1),$$

①我们永远规定 $0! = 1$.

或者, 由佩亚诺式来表现出在 $x \to 0$ 时, 这个误差的无穷小量的阶:

$$r_n(x) = o(x^n).$$

例 回到前面所考虑的初等函数的展开式.

1) 令 $f(x) = e^x$. 近似公式为:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

因为在这里的余项是

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

所以, 例如在 $x > 0$ 时, 可估计误差如下:

$$0 < r_n(x) < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

特例, 若 $x = 1$,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad 0 < r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

我们在 **49** 段数 e 的近似计算中已经利用过与此类似的公式, 但余项的估计是由另一方法得出的, 那里的结果是比较精确些.

2) 取 $f(x) = \sin x$, 得到

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

在这个情形余项为:

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

而且容易估计误差:

$$|r_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

特别地, 若我们只取一项而令

$$\sin x \approx x,$$

那么, 为了要使误差小于, 比如说 0.001, 就只要取 (算作 $x > 0$)

$$\frac{x^3}{6} < 0.001 \quad 或 \quad x < 0.1817,$$

它大约等于 10°. 在利用两项的近似公式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

时, 要想达到同样的准确度, 就只需要取

$$\frac{x^5}{120} < 0.001 \quad 或 \quad x < 0.6544 (\approx 37.5^\circ);$$

如果限制角 $x < 0.4129(\approx 23.5^\circ)$, 那么误差甚至可 < 0.0001, 余类推.

3) 类似地对于 $f(x) = \cos x$, 我们有

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!},$$

而且

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

于是

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

例如, 对于公式

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

有误差

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}.$$

要使误差, 比如说, < 0.0001, 就要使 $x < 0.2213(\approx 13^\circ)$, 余类推.

我们要请读者注意, 与 **56**、**57**、**93** 诸段的公式比较起来这里已有了重大的进展: 现在我们已经能够确定误差的限度, 并且也得到了具有任何准确度的展开式.

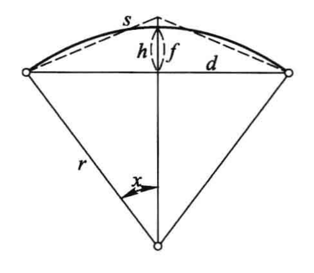


图 41

最后, 我们举一个完全是另一类型的近似公式的例, 但是仍旧要用到泰勒公式.

4) 要想把圆弧近似地求长, 而这条弧与半径比较起来是很微小的 (图 41), 切比雪夫[①]曾经给出了以下的法则: 弧长 s 近似地等于作在弦长 d 上而高为 $\sqrt{\frac{4}{3}}f$ (f 是弓形高) 的等腰三角形的两腰之和.

若以 x 记圆心角的一半, r 记半径, 则 $s = 2rx$. 另一方面,

$$\frac{1}{2}d = r\sin x = r\left\{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right\}, \quad \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = r^2\left\{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right\},$$

$$h = \sqrt{\frac{4}{3}}f = \sqrt{\frac{4}{3}}r(1-\cos x) = \sqrt{\frac{4}{3}}r\left\{\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right\},$$

$$h^2 = r^2\left\{\frac{x^4}{3} + o(x^5)\right\},$$

于是等腰三角形的两腰之和, 依照毕达哥拉斯定理, 等于

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2} = 2r\sqrt{x^2 + o(x^5)} = 2rx\sqrt{1 + o(x^3)} = 2rx + o(x^4).$$

读者明白, 在切比雪夫公式里因子 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 的作用就是在于要消灭掉根号里 x^4 的那一项. 计算的结果, 所得的弧长的近似值与弧本身的长相差一个高于四阶的无穷小量.

①巴夫努其 · 里沃维奇 · 切比雪夫院士 (1821—1894) 是伟大的俄罗斯数学家, 是彼得堡数学学派的奠基人.

我们还要在第十五章 (第二卷) 关于无穷级数部分里再来讲有余项的泰勒公式, 在那里这个公式将起着极其重要的作用, 在那里也将举些应用级数于近似计算的例子, 这些例子其实往往就是泰勒公式的应用.

第七章　应用导数来研究函数

§1. 函数的变化过程的研究

110. 函数为常数的条件　在研究函数的变化过程的时候首先出现的问题是, 在哪些条件下函数在一个给定的区间内始终等于常数, 或者单调地变化 [**47** 段].

定理　*设函数 $f(x)$ 定义在区间 $\mathscr{X}$*[①] *上, 且在其内有有限的导数 $f'(x)$, 而在其两端 (若它们属于 $\mathscr{X}$) 上保持连续. 要使 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 上为常数, 充分的条件是*

$$f'(x) = 0 \quad \text{在 } \mathscr{X} \text{ 内}.$$

证明　假定这一条件已是满足. 我们从区间 $\mathscr{X}$ 中固定某一点 x_0, 再取其他的任何一点 x. 对于区间 $[x_0, x]$ 或 $[x, x_0]$ 拉格朗日定理 [**102** 段] 的一切条件都是满足了的. 因此, 我们可以写出

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

其中 c 在 x_0 与 x *之间*, 也就是, 已知 c 是在 $\mathscr{X}$ *内*. 但是依据假定 $f'(c) = 0$, 因而, 对于 $\mathscr{X}$ 中的一切 x

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

我们的论断就已证明.

注意, 定理中的这个条件显然也是函数为常数的*必要*条件.

由此可以推得以下的简单推论, 它在积分学内将有着重要的应用.

[①] 区间 $\mathscr{X}$ 可以是闭的或不是闭的, 有限的或无穷的.

推论 设两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义在区间 $\mathscr{X}$ 上, 且在其内有有限的导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$, 而在其两端 (若它们都属于 $\mathscr{X}$) 上保持为连续. 若这时

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{在 } \mathscr{X} \text{ 内},$$

则在全区间 $\mathscr{X}$ 上这两个函数仅相差一个常数:

$$f(x) = g(x) + C \quad (C = \text{常数}).$$

只要把定理应用到差 $f(x) - g(x)$ 上去就可证明; 因为 $f(x) - g(x)$ 的导数在 $\mathscr{X}$ 内成为零, 因而差本身在 $\mathscr{X}$ 上就成为常数.

现在来考虑函数

$$\arctan x \quad \text{与} \quad \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$$

为例, 很容易验证, 它们的导数在除去 $x = \pm 1$ (在此处第二个函数失去意义) 以外的一切点 x 处都是相等的. 因此, 恒等式

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2} = \arctan x + C$$

仅是分别地在区间

$$\mathscr{X}_1 = (-1, 1), \quad \mathscr{X}_2 = (-\infty, -1), \quad \mathscr{X}_3 = (1, +\infty)$$

中的每一个上成立. 很奇妙的是, 常数 C 的值在这些区间上各不相同. 在第一个区间上 $C = 0$ (令 $x = 0$, 就可证实), 而在其他两个区间上, 各有 $C = \frac{\pi}{2}$ 或 $C = -\frac{\pi}{2}$ (这是很容易证明的, 例如, 若令 $x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$).

所有这些关系式也都可以用初等的方法来证明.

附注 在作理论研究的时候, 以及一般地当函数是这样给定着, 从它的定义里不能够直接看出它是常数的时候, 那么刚才证明的定理的价值就显示出来了. 类似于此的情况我们以后还会屡次遇到.

111. 函数为单调的条件 我们现在来说明, 怎样能够由函数的导数去判定函数本身在一个给定的区间上是增 (减) 的.

定理 设函数 $f(x)$ 确定在区间 $\mathscr{X}$ 上, 且在其内有有限的导数 $f'(x)$, 而在其两端 (若它们属于 $\mathscr{X}$) 上保持着连续. 要使 $f(x)$ 在 $\mathscr{X}$ 上狭义地单调增 (减), 充分的条件是

$$\text{在 } \mathscr{X} \text{ 内 } f'(x) > 0 \quad (< 0).$$

证明 今对增的情形来进行证明. 设这时已满足所述的条件. 在 $\mathscr{X}$ 里我们取两个值 x' 与 $x''(x' < x'')$, 且在区间 $[x', x'']$ 上对于函数 $f(x)$ 应用拉格朗日公式:

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \quad (x' < c < x'').$$

因为 $f'(c) > 0$, 所以

$$f(x'') > f(x'),$$

而函数 $f(x)$ 就严格地增了.

这一次所述的条件已不再是完全必要的条件了. 例如, 若导数 $f'(x)$ 在区间 $\mathscr{X}$ 内的有限多个点处成为 0 时, 则定理仍然成立. 我们可以很容易地来证实这一点, 就是把区间 $\mathscr{X}$ 用这些点来分成若干小区间, 再在每个小区间上分别地应用刚才证明的定理.

只要回想一下 [**77**、**78** 段] 导数就是函数图形上的切线斜率, 那么从几何上看来, 刚才在导数的符号与函数变化方向之间所建立的联系是非常明显的了. 这个斜率的符号指出了切线是向上还是向下倾斜的, 于是曲线本身也就随着切线向上或向下前行 (图 42). 切线在个别的点上也可能是水平的, 这就相当于导数成为零时.

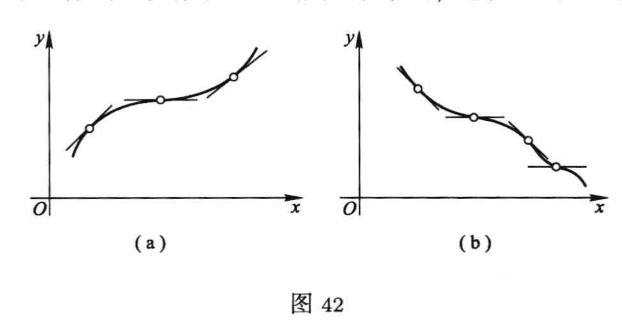


图 42

例 1) 函数 $f(x) = x^3$ 就是后一种情况的最简单的例子: 它是增函数, 但是它的导数 $f'(x) = 3x^2$ 却在 $x = 0$ 时为零.

2) 类似地, 函数

$$f(x) = x - \sin x$$

也是个增函数, 因为它的导数

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

不为负数, 虽然在数值 $x = 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时为零.

112. 极大及极小 · 必要条件 若函数 $f(x)$ 定义于区间 $[a, b]$ 上并在其上是连续的, 但不是单调的, 则在区间 $[a, b]$ 上必能找到些部分区间 $[\alpha, \beta]$, 在它们的内点 (即在 α 与 β 之间) 处函数可以达到最大值或最小值. 在函数的图形 (图 43) 上包含着峰或谷的区间就对应于这些部分区间.

我们说函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大 (或极小)[①], 若对于 x_0 能够在函数的定义区间里有这样的一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 其中一切点 x 都能满足不等式

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

换句话说, 若数值 $f(x_0)$ 是函数在这点的某个 (即使很小的) 邻域内所取的一切值中的最大值 (最小值), 则说 $f(x)$ 在点 x_0 处达到极大 (极小). 请注意, 就从极大 (极小) 的定义里先已假定了函数在点 x_0 的两侧都是给定了的.

①按照拉丁文 maximum 与 minimum 的意思是 “最大的” 与 “最小的”(值).

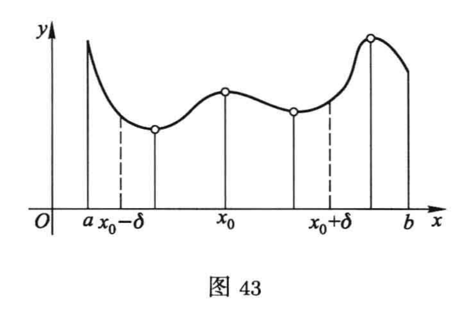


图 43

若有这样的邻域存在, 在其中 (在 $x \neq x_0$ 时) 成立着严格的不等式

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

就是说, 函数在点 x_0 有狭义的极大 (极小), 否则, 在相反的情形, 就说有广义的极大 (极小).

若函数在点 x_0 及 x_1 都有极大, 则对于区间 $[x_0, x_1]$ 我们应用魏尔斯特拉斯第二定理 [**73** 段], 就可看出, 函数必在 x_0 与 x_1 之间的某一点 x_2 处达到在这个区间上的最小值, 也就是 $f(x)$ 在 x_2 处就有极小. 类似地, 在两个极小之间也一定能找出至少一个极大. 在那种最简单的 (而实用上是最重要的) 情形下, 即当函数总共只有有限多个极大及极小的时候, 这些值干脆就交替着出现.

注意, 可以用一个共同的名词 ——*极值*① 来表示极大或极小.

现在要问, 怎样去求出能使函数获得极值的变元的一切值, 在解决这个问题的时候, 导数就会起着根本的作用.

首先假定, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内存在着有限导数. 若在点 x_0 函数有极值, 则应用前面讲过的费马定理 [**100** 段] 于区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 就得出 $f'(x_0) = 0$: 这就是极值存在的*必要条件*. 极值只能在那些使导数为零的点里去找; 这种点就叫做*静止点*②.

但是不要以为, 每一个静止点都能够使函数获得极值: 刚才所指出的条件只是必要的, 而非充分的. 我们曾经看到, 例如, 在 **111** 段, 1) 里, 函数 x^3 的导数 $3x^2$ 在 $x = 0$ 时就等于零, 然而在这一点函数却没有极值: 它始终是递增着.

这样, 一个函数 $f(x)$ 的静止点, 可以说, 只是关于极值的一个 "可疑的" 点, 我*们还应当对它作进一步的检验*.

若是扩大所考虑的函数的种类, 而设 $f(x)$ 在个别的点处不存在有限导数, 那么 $f(x)$ 也可能在某一个这种有限导数不存在之点处取得极值. 因此也同样应该把这种点放在关于极值的 "可疑的" 点之列, 而且给以检验.

113. 第一法则 因此, 设点 x_0 是关于函数的极值的 "可疑的" 点.

①拉丁文 extremum, 它的意思是 "极端的" (值).
②在这些点处函数好像是 "停止" 了变化: 这时变化的速度 [**78** 段] 为零.

假定, 在这点 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 (至少对于 $x \neq x_0$) 存在着有限的导数 $f'(x)$, 而且这个导数在 x_0 的左右两边都 (分别地) 保持着确定的符号. 这时, 就会有以下三种情形:

I. 在 $x < x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 而在 $x > x_0$ 时 $f'(x) < 0$, 即导数 $f'(x)$ 在经过点 x_0 时由正号变为负号. 在这一情形, 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0-\delta, x_0]$ 上是增的, 而在区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 上是减的, 于是数值 $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在区间 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的最大值, 即是, 在点 x_0 函数有极大.

Ⅱ. 在 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$, 而在 $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$, 即导数 $f'(x)$ 在经过点 x_0 时由负号变为正号. 在这一情形, 类似地可以证实, 在点 x_0 函数有极小.

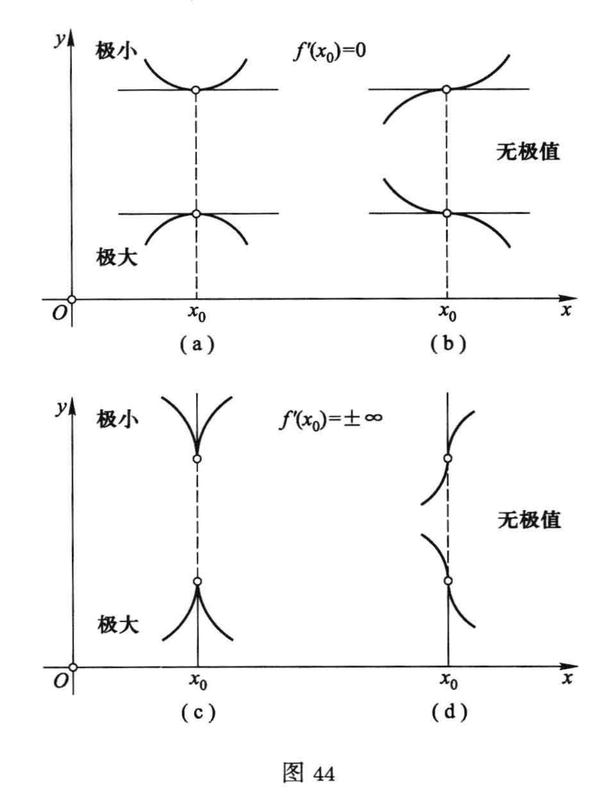


图 44

Ⅲ. 在 $x < x_0$ 及 $x > x_0$ 时都有 $f'(x) > 0$, 或者在 x_0 的左右两边都有 $f'(x) < 0$, 即 $f'(x)$ 在经过点 x_0 时并不变号. 那时函数或者总是增的, 或者总是减的: 在 x_0 的某一侧的任意近处总可找出些点 x, 使 $f(x) < f(x_0)$, 而在其他一侧又有些点 x 使 $f(x) > f(x_0)$, 于是在点 x_0 无极值.

于是, 我们得到检验 "可疑的" 值 x_0 的第一个法则: 先把 $x < x_0$, 再把 $x > x_0$ 代入导数 $f'(x)$ 以确定导数在点 x_0 的左右附近的符号: 若这时导数 $f'(x)$ 的符号由正变负, 则有极大, 若由负变正, 则有极小, 若不变号, 则绝无极值.

现在来描述一下我们将对之应用这一法则的那一类函数. 这类函数 $f(x)$ 在区

间 $[a,b]$ 上连续且有连续的导数 $f'(x)$, 最多有限多个点除外. 在这些例外的点处导数 $f'(x)$ 从它的左边及右边都要趋向于同号或异号的无穷极限, 在第一种情形存在着双侧无穷导数, 而在第二种情形因符号不同就分为两个单侧导数 ①. 最后还设导数只能在有限多个点处为零. 对于这类函数的关于极值的 "可疑的" 点的各种可能性, 我们在图 44 上给出了几何的说明.

注意, 在 (b), (c), (d) 的情形中, 曲线是从切线的一边穿过切线而到另一边的; 在这种情形就说是曲线有*拐点*.

对于所考虑的这一类函数, 上述的法则完全可以解决我们所关心的问题. 这是因为, 对于这种函数在区间 (a,b) 内只有有限多个静止点或有限导数在那里不存在的点:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < b, \tag{1}$$

又在任一区间

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_k,x_{k+1}),\cdots,(x_{n-1},b) \tag{2}$$

内导数 $f'(x)$ 保持着不变号. 事实上, 如果 $f'(x)$, 例如在区间 (x_k,x_{k+1}) 内, 变了号的话, 那么, 由 $f'(x)$ 的连续性的假定 —— 依波尔查诺 - 柯西定理 [**68** 段]—— 它在 x_k 与 x_{k+1} 之间的某一点就要为 0, 但这是不可能的, 因为导数的一切根都已包括在点列 (1) 之内了.

依照 **111** 段的定理, 在 (2) 中的每个区间内函数严格单调地变化着.

附注 虽然所指出的这类函数已足可包括一切实用上有价值的情况, 但是可能在有些情形我们这一研讨 "可疑的" 值的法则并不适用, 懂得这一点是有好处的. 例如, 若考虑由等式

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad (\text{在 } x \neq 0 \text{ 时}) \qquad \text{及} \quad f(0) = 0$$

所确定的函数. 我们已知 [**88** 段, 2°] 它在 $x=0$ 时有导数 $f'(0)=0$. 可是在这个静止点的左边及右边的任何近处, 导数

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

却会无穷多次地变号, 同时也无穷多次地为零, 所以法则不能适用 (虽然不用它, 也能直接地表明在点 $x=0$ 处无极值).

114. 第二法则 设点 x_0 是静止点:

$$f'(x_0) = 0, \tag{3}$$

且函数 $f(x)$ 不仅在这点的一个邻域内有一阶导数 $f'(x)$, 而且在点 x_0 还有二阶导数 $f''(x_0)$, 那么就可以把一切的检验都转化成为对于 $f''(x_0)$ 符号的考察, 这里假定 $f''(x_0)$ 不为零.

其实, 由导数的定义, 再配合 (3), 就有

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

①利用刚才讲过的导数符号的探讨就恰好可以判别出这些情况.

然而, 依照 **37** 段, 2) 中的定理, 函数

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} \tag{4}$$

的符号, 只要当 x (不等于 x_0) 充分接近于 $x_0(|x - x_0| < \delta)$ 的时候, 就与其极限 $f''(x_0)$ 的符号相同.

又设, 比如说, $f''(x_0) > 0$; 那时分数 (4) 对于上述的一切值 x 就是正的. 但是当 $x < x_0$ 时, 分母 $x - x_0 < 0$, 因此, 分子 $f'(x)$ 也必须同样地小于零; 反之, 当 $x > x_0$ 时, 就有 $x - x_0 > 0$, 于是也有 $f'(x) > 0$. 换句话说, 我们得出导数 $f'(x)$ 的符号由负变正, 于是就可以依照第一法则, 得出在点 x_0 有极小. 类似地可以确定: 若在点 x_0 处 $f''(x_0) < 0$, 则在点 x_0 有极大.

这样, 可以把用来检验 "可疑的" 值 x_0 的第二法则叙述于下: *把 x_0 代入二阶导数 $f''(x)$ 内; 若 $f''(x_0) > 0$, 则函数有极小, 若 $f''(x_0) < 0$, 则函数有极大.*

一般说来, 这一法则的适用范围是比较狭窄的: 例如, 在那些有限一阶导数不存在的点处, 这一法则就显然是不能用的 (因为在那里就更谈不上二阶导数). 又如在那种二阶导数等于零的情形, 这个法则也同样地不能给出什么结果. 那时问题的解决就要依赖于高阶导数的性态了 [参看 **117** 段].

115. 函数的作图 善于找出那些数值 x 使函数 $y = f(x)$ 在那里能够取得极值, 这可以用在函数的作图上, 它可以更精确地刻画出当 x 在区间 $[a, b]$ 上从左到右逐渐增大的时候, *函数的变化进程*.

以前 [**19** 段] 我们按点作过图形, 所取的点或是较密或是较疏, 但这些点的取法都是偶然的, 而没有顾及每一个图形的特性 (事先也并不知道). 现在我们就可以利用前面所指出的一些方法去确定某些个 "据" 点, 也就是能说明*当前函数的特性的点*. 我们这里所指的, 首先就是图形的 "转向点", 即是曲线的峰与谷, 它们对应于函数的极值. 此外, 一切有水平切线或垂直切线的点, 即使它们并不对应于函数的极值, 也应算到这些 "据" 点里去.

我们只限于考虑在 **113** 段内所指出的一类函数 $y = f(x)$. 这时, 要作这种函数 $y = f(x)$ 的图形, 就应该进行如下:

1) 确定使导数 $y' = f'(x)$ 等于零或无穷大 (或至少存在无穷单侧导数) 的 x 值, 并研究这些 x 是不是对应于函数的极值;

2) 对于一切这些 x 值以及所论的区间的端点 a 与 b, 计算出函数 $y = f(x)$ 的对应值.

为了方便起见, 可把所得的结果列成一表 (参看下面的例题), 并把图形上算出了的点的特性给予必要的标明: *极大、极小、拐点*, $y' = 0, y' = +\infty, y' = -\infty$, 以及最后 $y' = \pm\infty$ 或 $y' = \mp\infty$ (我们约定用这两个符号来记异号的无穷单侧导数的情形). 若是愿意的话, 在上述的那些图形上的点以外, 还可以再考虑一些其他的点, 例如, 图形与两轴的交点等.

把这些点都画到图上之后, 就可以经过这些点 (点的个数一般是不太多的) 作函数的图形, 并且注意到这些点的特性. 应当记住, 在它们之间的各个区间上, **113** 段中已经说明过, 导数的符号是不变的, 于是图形在每一个区间上也就总是向上或总是向下地前行着.

若当 x 变号时函数值不变 (偶函数), 则图形就对称于 y 轴, 于是曲线的计算与作图就可简化些. 当图形对称于坐标原点时, 作图也可简化. 它在解析上表示: 当 x 变号时函数也只变其号 (奇函数).

准确地指出函数的增与减的区间, 以及函数的变化速度减到零或增到无穷的那些点. 这样作出的图形 —— 不企图去求得各个纵坐标的准确性 —— 已经可以十分完善地反映出函数变化的进程 (这也正是我们的目的).

116. 例 1) 求函数

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$$

的极值, 且作其图.

由于函数周期为 2π, 所以我们只要讨论 x 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的变化就可以了. 它的导数是

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x \cdot \cos^2 x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x).$$

它的根 (静止点) 是:

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi.$$

在经过 $x = 0$ 时因子 $\sin x$ 的符号由负变正, 而 $f'(x)$ 的最后两个因子的乘积在 $x = 0$ 附近保持着负号, 所以整个导数的符号由正变负; 故在 $x = 0$ 有极大因子 $\sin x - \cos x$, 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 时等于零, 在经过这点时, 这因子的符号由负变正, 且因为前面两个因子都为正, 故导数的符号由负变正; 因此在这点有极小. 仿此考察其余的静止点: 在所有这些点处函数交替地获得极大与极小.

要决定极值, 我们也可以不去考察一阶导数的变号, 而来计算二阶导数

$$f''(x) = 3(\sin x + \cos x)(3\sin x \cos x - 1),$$

再把要检验的 x 值直接代入 $f''(x)$. 例如, 在 $x = 0$ 时, 我们得到 $f''(0) = -3$, 这对应于极大. 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 就有 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, 即对应于极小, 余类推.

我们还要来决定图形与 x 轴交点的横坐标, 就是, 解方程式 $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$, 由此 $\cos x = -\sin x$, 于是 $x = \frac{3\pi}{4}$ 或 $x = \frac{7\pi}{4}$.

现在把这些求得的 x 值的对应函数值算出来, 并且列成一个表:

$x =$	0	$\frac{\pi}{4} = 0.78$	$\frac{\pi}{2} = 1.57$	$\frac{3\pi}{4} = 2.36$	$\pi = 3.14$	$\frac{5\pi}{4} = 3.94$
$y =$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.71$
	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$		$y' = 0$	$y' = 0$
	极大	极小	极大		极小	极大

$x=$	$\frac{3\pi}{2}=4.71$	$\frac{7\pi}{4}=5.50$	$2\pi=6.28$
$y=$	-1	0	1
	$y=0$		$y'=0$
	极小		极大

依照着这个表可以作出图形, 把它画在图 45 上.

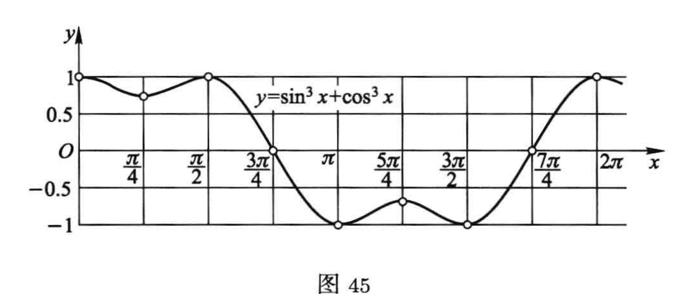


图 45

2) 求函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值, 且作其图形.

在这次有限导数

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

除了在点 $x=0$ 及 $x=\pm 1$ 以外, 是到处存在的. 当 x 从左边及右边去接近这些值时, 导数就有无穷极限, 即是说, 在这些点上导数等于 $\pm\infty$ [**103**].

要确定导数的根, 可令它的分子等于零, 我们就求得: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. 于是关于极值为"可疑的"点就是:

$$-1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 1.$$

此外, 由于这函数是偶函数 (因此, 它的图形对称于 y 轴), 所以就只要限于右半平面, 即数值 $x\geqslant 0$, 来讨论就够了.

当 $x=0$ 时 (并在此点附近) 分子与分母的第二个因子都有正号. 因子 $x^{\frac{1}{3}}$ 则由负变为正, 因此导数亦由负变为正: *极小*. 当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 (并在其附近) 分母恒为正. 至于分子, 由于 x 之值在 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 附近, 可以重写为 $(1-x^2)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}$; 它在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时为 0, 而随 x 之减小而增大, 随 x 之增大而减小, 因此是由正变为负而有*极大*出现. 在经过 $x=1$ 时, 分母中的因子 $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ 在该点为 0, 然而却不变号; 整个导数亦然, 因此在 $x=1$ 时没有极值.

虽然所考虑的函数定义在整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 上而且是连续的, 但是图形当然只能够在有限区间上去作出来. 然而仍可以说明函数"在无穷远处"的性态: 若把函数重写成

$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

则就很显然的有: $f(x)>0$, 且当 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$. 这样, 函数的图形是在 x 轴的上边, 不过当图形向左边无穷远处及右边无穷远处移动时, 它却可以无限地接近于 x 轴.

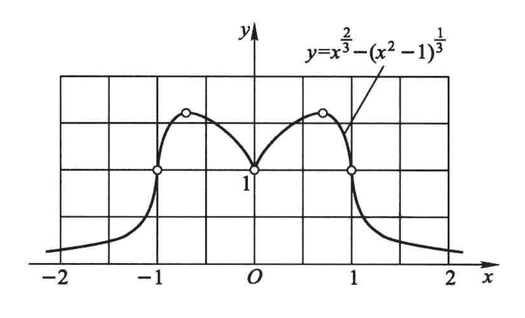


图 46

表:

$x=$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.71$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0.71$	1	$+\infty$
$y=$	0	1	$\sqrt[3]{4}=1.59$	1	$\sqrt[3]{4}=1.59$	1	0
		$y'=+\infty$	$y'=0$	$y'=\mp\infty$	$y'=0$	$y'=-\infty$	
			极大	极小	极大		

图形见图 46.

117. 高阶导数的应用 我们已经看到, 若 $f'(x_0)=0$ 而 $f''(x_0)>0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小; 又若 $f'(x_0)=0$ 而 $f''(x_0)<0$, 则函数在这点有极大. 至于当 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)=0$ 的情形, 我们还没有研究过.

现在假定函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域内有 n 个逐阶导数, 且第 n 阶导数在点 $x=x_0$ 连续. 又设直到 $(n-1)$ 阶为止这些导数全都在这点等于零:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

但同时却有 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 把函数 $f(x)$ 的增量 $f(x)-f(x_0)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂而用有佩亚诺型余项的泰勒公式 [**107** 段, (17)] 来展开. 因为小于 n 阶的一切导数在点 x_0 等于零, 故

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

由于当 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to 0$, 所以当 x 充分接近于 x_0 时, 分子的和的符号就会与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号相一致, 在 $x<x_0$ 时以及在 $x>x_0$ 时都是如此. 现在来考虑两种情形:

1°. *n 是奇数*: $n=2k+1$. 当 x 的数值由小于 x_0 变到大于 x_0 时, 因式 $(x-x_0)^{2k+1}$ 就会变号, 但因为上式第一个因子这时不变号, 所以差 $f(x)-f(x_0)$ 也要变号. 这样

一来, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 就不能有极值了, 因为在这点的附近, 函数值有小于 $f(x_0)$ 的, 也有大于 $f(x_0)$ 的.

2°. n 是偶数: $n = 2k$. 在这一情形, 当 x 由小于 x_0 变到大于 x_0 时, 差 $f(x) - f(x_0)$ 并不变号, 因为对于一切 x 都有 $(x - x_0)^{2k} > 0$. 显然, 在 x_0 的左右两边附近, 差 $f(x) - f(x_0)$ 的符号与数 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号是一致的. 这即是说, 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则在点 x_0 的附近 $f(x) > f(x_0)$, 于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极小; 又若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则函数有极大.

由此即得这样的法则:

*若在各阶导数中, 第一个在点 x_0 不等于零的是奇数阶导数, 则函数在点 x_0 既无极大值也无极小值. 若这种导数是偶数阶导数, 则函数在点 x_0 有极大值或极小值, 且要看这个导数是负的还是正的而定*①.

例如, 对于函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$, 则 $x = 0$ 是静止点, 因为在这点导数

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$$

等于零. 其次:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0; \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0; \\ f''''(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f''''(0) = 4. \end{aligned}$$

因为第一个不等于零的是偶阶导数, 故有极值, 又因 $f''''(0) > 0$, 而为极小.

§2. 函数的最大值及最小值

118. 最大值及最小值的求法 设函数 $f(x)$ 定义在有限闭区间 $[a, b]$ 上而且是连续的. 迄今为止我们只注意到函数的极大及极小, 现在再提出一个问题, 即怎样去找出函数在这个区间上所取的一切值中的*最大的*及*最小的*;② 根据连续函数的已知性质 [**73**], 这种最大值及最小值都是存在的. 为了确定起见, 就来讨论最大值.

若函数在 a 与 b 之间某点达到最大值, 则它同时也就是极大之一 (显然, 是最大的极大); 但是函数也可能在区间的一个端点 a 或 b 上达到最大值 (图 47). 这样一来, 我们就需要把函数 $f(x)$ 的一切极大互相比较一下, 并且与它的边界值 $f(a)$ 及 $f(b)$ 也要比较一下; 这些数中的最大的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一切值中的最大值. 类似地也可以找出函数的最小值.

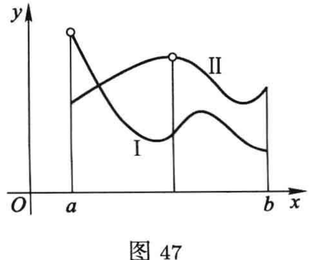


图 47

①1742 年柯林 · 麦克劳林在他的《流数论》里指出了这个法则.

②这样, 我们替名词 "极大" 保留起它的 "特有的" 意义 (函数在对应点的直接邻域内的最大值), 并且使它有别于在所考虑的全区间上函数的最大值.

关于函数的极小与最小值也是一样.

如果要想避免对极大或极小进行探讨, 那么可以换个做法. 只需算出在一切有关极值的 "可疑的" 点处的函数值, 再把它们与边界值 $f(a)$ 及 $f(b)$ 相互比较一下; 这些数中的最大数及最小数显然就是函数一切值中的最大值及最小值.

附注 在应用问题上多半会碰到在 a 与 b 之间只有一个 "可疑的" 点 x_0 这种简单情形. 如果在这点函数有极大 (极小), 那么不必去与边界值相比较也可明白这就是函数在区间上的最大值 (最小值) (图 48). 在这类情形, 去对极大及极小进行探讨经常会显得比去算出及比较函数的个别的一些值更为简单 (尤其是, 若在函数的表达式内含有字母常数时).

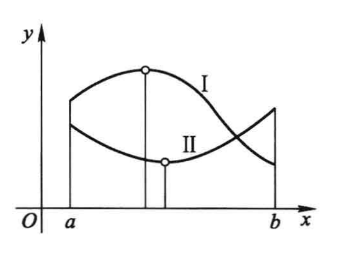


图 48

还要着重指出, 上面所讲的完全可以适用于开区间 (a, b) 以及无穷区间.

119. 问题 现在阐明属于各方面的几个问题. 这些问题的解决恰好就要归结于求函数的最大值或最小值. 然而, 时常这些函数值本身还不及那些使函数获得极值的点 (变元的数值) 有意义.

1) 在一块边长为 a 的正方形铁片的各角上切去相等的正方块, 再把它的边沿着虚线折转 (图 49), 作成一个无盖的方底盒子. 怎样才能得出有最大容积的盒子呢?

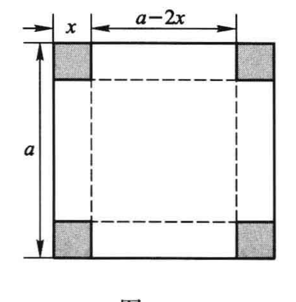


图 49

若用 x 表示切去的正方块的边长, 则盒子的体积 y 可以表示为: $y = x(a - 2x)^2$, 而 x 是在区间 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ 上变化着. 问题就已成为去找出函数在这个区间上的最大值了.

因为导数 $y' = (a - 2x)(a - 6x)$ 在 0 与 $\frac{a}{2}$ 之间只有唯一的根 $x = \frac{a}{6}$, 所以, 由此可知, 这个值可使函数获得极大, 同时我们也就得到了所要求的最大值. 或者换种说法: 在 $x = \frac{a}{6}$ 时有 $y = \frac{3a^3}{27}$, 同时 y 的边界值却等于零; 因此在 $x = \frac{a}{6}$ 时, 真正得出 y 的最大值.

2) 已知一木料有直径为 d 的圆截面. 要把它砍为有矩形截面的且最坚固的木梁.

提示 在材料力学的理论中已证明了, 矩形梁的强度与积 bh^2 成比例, 此处 b 是木梁的矩形截面的底, 而 h 是它的高.

因为 $h^2 = d^2 - b^2$, 所以问题就涉及表达式 $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$ 的最大值, 其中 "自变量" b 是在区间 $(0, d)$ 内变化着.

导数 $y' = d^2 - 3b^2$ 在这个区间内只有一次是等于零, 即是在点 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 处. 二阶导数 $y'' = -6b < 0$, 因此, 在所指出的这点达到了极大, 同时也就是最大值.

在 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时, $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, 于是 $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$. 从图 50 上可以看到, 怎样去作所求的矩形 (就是, 把直径分成三等份, 再在各个分点上作一垂线).

3) 设一电灯可以沿着铅垂线 OB (图 51) 移动 (例如, 装在滑轮上时). 它在与水平面 OA 有怎样的距离时就应该停止移动, 才能够使得这个平面上的点 A 处有最大的照度?

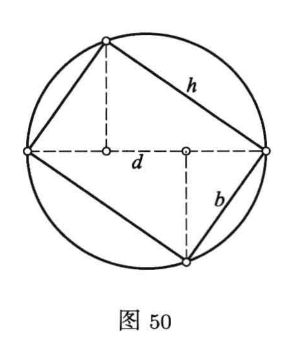


图 50

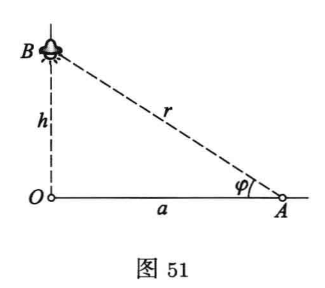


图 51

提示 照度 J 与 $\sin\varphi$ 成比例, 而与距离 $r = AB$ 的平方成反比例, 即是

$$J = c\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 c 与灯光的强度有关.

若取 $h = OB$ 为自变量, 则

$$\sin\varphi = \frac{h}{r},\quad r = \sqrt{h^2 + a^2},$$

而 $J = c\cdot\dfrac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}(0 < h < +\infty)$. 其次, 导数

$$J'_h = c\cdot\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

在 $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \approx 0.7a$ 时等于零, 而且在 h 经过这个值时 J'_h 符号由正变到负, 这个 h 就是最适当的距离.

附注 趁此机会要请读者注意下面的情况. 当寻求函数在变元的确定的变化区间上的最大值或最小值时, 可能容易遇到在这个区间内完全没有导数的根, 或其他 "可疑的" 值. 这一件事也就表明在所考虑的区间上函数是单调增的或是单调减的, 因此, 它必在区间的两端上达到最大值及最小值.

§3. 未定式的定值法

120. $\dfrac{0}{0}$ 型未定式 现在利用导数的概念去定出一切类型未定式的值. 我们先从基本情形 —— $\dfrac{0}{0}$ 型未定式入手, 就是研究两个趋向于零 (例如, 在极限过程 $x \to a$ 之下) 的函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的比值的极限问题. 以下引入的定理大体上是约翰 · 伯努利做出的结果. 不过包含在这一定理中的法则却是常常叫做 "洛必达法则", 因为正是在洛必达著的[①]、1696 年出版的《无穷小量分析》上, 第一次发表这一法则 (虽然还不完全是目前的形式).

① 基约姆 · 佛朗索阿 · 德 · 洛必达 (1661—1704) 是法国数学家. 在正文里所提到的那本书是第一本出版的微分学教程.

定理 1 设: 1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区间 $(a,b]$ 上, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 3) 在区间 $(a,b]$ 上存在着有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$, 且 $g'(x) \neq 0$, 最后 4) 存在着 (有限或无穷) 极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

则也有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

证明 令 $x = a$ 时函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 等于零: $f(a) = g(a) = 0$[①], 我们补充了 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在点 a 的定义. 于是这两个函数在整个闭区间 $[a,b]$ 上就都成为连续的了: 函数在点 a 的值与 $x \to a$ 时它们的极限相同 [由 2)]. 而函数在区间上其他各点处的连续性又可从有限导数的存在而推出 [参看 3)]. 应用柯西定理 [**104** 段], 得到

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中 $a < c < x$. 这里 $g(x) \neq 0$, 即 $g(x) \neq g(a)$ 是假设中 $g'(x) \neq 0$ 的一个推论, 这在证明柯西公式时就已经得到过了.

当 $x \to a$ 时, 显然地, 也有 $c \to a$, 所以, 由 4),

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

这就是需要证明的.

这样, 已证明的定理就把函数之比的极限化成导数之比的极限, 若是后者存在的话. 求导数之比的极限往往会显得比较简单些, 而且可以用初等的方法来做出.

注意, 只不过是为了确定起见, 我们才考虑 a 是区间的左端点, 而变量 x 从右边趋向于 a 的情形. 也可以把 a 算作是右端点, 而 x 从左边趋向于 a. 最后, 也同样可以容许双侧极限过程的情形.

例 1) 求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}.$$[②]

依洛必达法则, 它等于极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}} = \frac{16}{9}a.$$

---

① 当然, 本来也可以先就索性假定这两个函数定义且在 $x = a$ 处连续; 但是, 把定理的条件说成像正文里的那样在应用上有时倒是比较方便些 (例如, 参看定理 1*).

② 这是在洛必达书里引用的关于未定式的定值法的第一个例子.

这里由于导数的比式在 $x=a$ 处连续, 所以可以把 $x=a$ 直接代入比式而得到最后的结果.

2) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}.$$

把导数的比式逐步化简:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\cos^2 x};$$

在 $x\to 0$ 时, 它显然趋向于 2. 按照定理, 这也就是所求的极限.

请读者注意, 这里导数的比式虽然又是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式, 但是要去定它的值却已可以用初等变换的方法了. 在其他的场合, 也可能需要重复地应用这个定理. 有必要提醒大家, 在定值的时候, 允许用各种方法去把所得的式子化简, 如约去公因子、利用已知的极限, 等等.

容易把定理 1 推广到变元 x 趋向于无穷极限: $a=\pm\infty$ 的情形. 例如, 以下的定理就是成立的:

定理 1 * *设: 1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区间 $[c,+\infty)$ 上, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 3) 在区间 $[c,+\infty)$ 上存在着有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$, 且 $g'(x)\neq 0$, 最后 4) 存在着 (有限或无穷) 极限*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

则也有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

证明 以公式 $x=\dfrac{1}{t}, t=\dfrac{1}{x}$ 更换变量 x. 于是, 若 $x\to+\infty$, 则 $t\to+0$, 反之亦然. 由 2) 就有

$$\lim_{t\to+0}f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0}g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

而由 4),

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}=K.$$

对于新变量 t 的函数 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 及 $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$, 可以应用定理 1, 就给出

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}=K,\text{①}$$

① 函数 $f\left(\dfrac{1}{t}\right), g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 是作为 t 的复合函数来对 t 求导数的.

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

即是所要求证的.

121. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式 现在再来考虑 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式, 即是研究两个趋向于无穷大 (在 $x\to a$ 时) 的函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的比值的极限问题. 我们要来证明, 在这种情形下洛必达法则同样是可以应用的; 下面的定理是定理 1 的简单的复述.

定理 2 设: 1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在区间 $(a,b]$ 上, 2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 3) 在区间 $(a,b]$ 上存在着有限导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$, 且 $g'(x)\neq 0$, 最后 4) 存在着 (有限或无穷) 极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

则也有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

证明 由 2), 可以认为, 对于所有的 x 值, $f(x)>0$ 及 $g(x)>0$.

先考虑 K 为有限的情形. 若给定任意数 $\varepsilon>0$, 则由条件 4), 必可求出这样的 $\eta>0$ $(\eta\leqslant b-a)$, 在 $a<x<a+\eta$ 时有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

为了简便, 令 $a+\eta=x_0$ 而取 x 在 a 与 x_0 之间. 把柯西公式应用到区间 $[x,x_0]$ 上①:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

式中 $x<c<x_0$, 因此,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

现在写出恒等式 (可以直接验证):

$$\frac{f(x)}{g(x)}-K=\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-K\right].$$

因为当 $x\to a$ 时, $g(x)\to\infty$, 所以必可求出这样的 $\delta>0$ (可以认为 $\delta\leqslant\eta$), 在 $a<x<a+\delta$ 时

$$g(x)>g(x_0),\quad 且\quad \left|\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

①这点就是与定理 1 的证明最不同的地方: 这里不能在区间 $[a,x]$ 上应用柯西公式, 因为, 不论怎样在点 a 处去定义函数 $f(x)$ 及 $g(x)$, 由 2) 总不可能得出在 a 点为连续的函数.

于是在上述的 x 值时, 就有 [参看 (1)]

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了所需要的命题.

现在设 $K = \infty$ [在假定 2) 之下, 不可能有 $K = -\infty$ 的情形]; 于是, 至少当 x 值充分接近于 a 时 $f'(x) \neq 0$. 把 f 与 g 的位置交换一下, 就有

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

所以, 依据已证明的结论,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

由此, 且由在本段开始所作的关于 $g(x) > 0, f(x) > 0$ 的说明即知

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

定理 2 中也可以认为 $a = -\infty$, 而定理的证明基本上并不需要更改. 如果 a 是所考虑的区间的右端点, 则作为特例也可以认为 $a = +\infty$. 这样, 定理 2 其实已经包括了 $a = \pm\infty$ 这种情形在内.

例

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^\mu} = 0 \quad (若\ \mu > 0).$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x\cdot\ln a} \quad (a > 1, \mu > 0).$

若 $\mu > 1$, 则右边又有同一类型 $\frac{\infty}{\infty}$ 的未定式; 但若继续这一步骤并且重复地应用定理 2, 最后在分子上必可得出带有负 (或零) 指数的幂. 因此, 在一切情形都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

122. 其他类型的未定式 前面的定理都是关于 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式的.

若有 $0\cdot\infty$ 型的未定式, 则可以把它变成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 而后应用洛必达法则, 设

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

并且 $f(x)$ 不变号. 于是就有

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

其中第二式在 $x \to a$ 时是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 第三式是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例 5)

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

(我们算作 $\mu>0$).

也总可以把 $\infty-\infty$ 型的未定式变成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 设有式子 $f(x)-g(x)$, 而且

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

于是, 可以作例如以下的变换, 把这个式子化为 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

然而在实际运算时常常还可以比这更简单地做到这一点.

例 6)

$$\lim_{x\to0}\left(\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x},$$

但

$$\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x};$$

前一个因子的极限可以用初等的方法去求出:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

对第二个因子应用定理 1:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}&=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

这样, 所要求的极限就等于 $-\dfrac{2}{3}$.

对于 $1^{\infty},0^{\circ},\infty^{0}$ 等型的未定式, 可以预先把这些式子取对数.

设 $y=[f(x)]^{g(x)}$, 则 $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$. $\ln y$ 的极限就是已经熟悉了的 $0\cdot\infty$ 型未定式. 若是用前面指出的方法之一能求出 $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, 它等于有限数 $k,+\infty$ 或 $-\infty$. 则 $\lim\limits_{x\to a}y$ 对应地就是 e^{k}, $+\infty$ 或 0.

例 7) 设

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

要在 $x \to 0$ 时求出 $\lim y$ (1^∞ 型未定式).

若算作 $x > 0$ (由于 y 是偶函数, 故可以限于这个假定), 则

$$\ln y = \frac{\ln \sin x - \ln x}{1 - \cos x}.$$

应用定理 1:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin^2 x}.$$

但是我们刚刚才看到过, 这个极限等于 $-\dfrac{1}{3}$. 这样,

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

附注 型如 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ 及 $\infty - \infty$ 的未定式可以在欧拉的著作中见到; 柯西也曾经考虑到未定式的一些标准类型, 但是这两个人都没有把 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的情形给以严格的证明!

第八章　多元函数

§1. 基本概念

123. 变量之间的函数关系 · 例　迄今为止我们只研究过两个变量的共同变化, 其中的一个变量依赖于另外一个: 由自变量的值已经完全可以决定因变量或函数的值. 然而出现几个自变量的情形, 也并不少见, 于是要想确定函数的值, 就必须先去确定所有这些自变量在同一时候各自所取的值.

1) 例如, 圆柱体的体积 V 是它的底半径 R 及高 H 的函数; 这些变量之间的依赖关系可用公式

$$V = \pi R^2 H$$

来表示, 由这个式子, 在知道了自变量 R 及 H 的值时, 就能够决定 V 的对应值.

2) 设一汽缸的活塞下面有一定质量的气体, 它的温度不是固定不变的; 于是这部分气体的体积 V 及压强 p 都与它的 (绝对) 温度 T 以克拉贝龙公式相联系:

$$pV = RT \quad (R = \text{常数}).$$

由此, 例如, 认为 V 及 T 都是自变量, 则它们的函数 p 就可以这样来表示:

$$p = \frac{RT}{V}.$$

3) 在研究任何物体的物理状态时, 往往需要去观察它的各种性质从一点到它点的变化. 例如: 密度、温度、电位等等. 所有这些量都是 "点的函数", 或者也可以说是点的坐标 x, y, z 的函数. 如果物体的物理状态是随着时间而变化的, 那么在这些自变量内就还要加上时间 t. 在这种情形我们就遇到了四个自变量的函数.

类似的例子读者自己还可以任意增多.

要想对于多个自变量的函数的概念给以精确的定义, 我们先从最简单的情形, 即当自变量有两个时开始.

124. 二元函数及其定义区域 在谈到两个自变量 x 及 y 的变化时, 我们每次都应该指出, 它们可以同时取得的是哪些对数值 (x,y); 这些成对的数值所成的集合 $\mathscr{M}$ 就是变量 x,y 的变化区域.

函数概念的定义可以用与一元函数的情况用类似的说法来给出:

如果依照某一法则或规律, 对于集合 $\mathscr{M}$ 中的每一对数值 (x,y) 相应地有 $\mathscr{Z}$ 中一个确定的 z 值, 则变量 z (它的变化区域为 $\mathscr{Z}$) 就叫做自变量 x,y 在集合 $\mathscr{M}$ 上的函数.

这里说的是单值函数; 很容易把这个定义推广到多值函数上去.

上面所讲的集合 $\mathscr{M}$ 就是函数的*定义区域*. 变量 x,y 本身 —— 对于它们的函数 z 而言 —— 叫做函数的*变元*. 与在一元函数时相类似, z 与 x,y 之间的函数关系可以表示为:

$$z = f(x,y), \quad z = \varphi(x,y), \quad z = z(x,y), \quad \text{等等}.$$

若从 $\mathscr{M}$ 中取出一对数值 (x_0,y_0), 则 $f(x_0,y_0)$ 就表示当 $x=x_0, y=y_0$ 时函数 $f(x,y)$ 所取的那一*特别* (数) 值.

现在举几个解析地 (即用公式) 给定的函数的例子, 并批出它们的定义区域. 公式

$$1)\ z = x^2 + y^2$$

对于一切数对 (x,y) 无例外地确定一个函数. 公式

$$2)\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad 3)\ z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

只能分别适用于 (如果我们只谈到有限的实数值 z) 那些满足不等式

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 < 1$$

的数对 (x,y). 公式

$$4)\ z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$$

是对于分别满足不等式

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b$$

的 x 及 y 所定义的函数.

在所有这些例子里我们都指出了公式所适用的最宽广的 —— *自然的* [**18** 段, 2°]—— 范围.

现在再考虑这样一个例子.

5) 设三角形的各边在周长保持有常量 $2p$ 的条件下任意地变化着. 若用 x 及 y 表示它的两边, 则第三边就是 $2p-x-y$, 于是三角形就完全由边 x 及 y 所确定了. 三角形的面积 z 与这两边有怎样的关系呢?

依照已知的公式这一面积可以表示为:

$$z = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

至于这个函数的定义区域$\mathscr{M}$, 在这一次, 它却要受到引进这函数的具体问题的限制. 因为三角形的每边边长是小于半周长的正数, 所以应当满足不等式

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x + y > p;$$

这些不等式就刻画出了区域 $\mathscr{M}$, 虽然所得出的公式本身在更宽广的范围上, 例如, 对于 $x > p$ 及 $y > p$ 还是有意义的.

这样, 虽然在一元函数的时候, 作为变元的标准的变化区域只是 (有限或无穷) 区间, 而在二元函数的情形, 我们就已经碰到变元的各种各样极为复杂的可能的 (与自然的) 变化区域了.

从这些区域的几何意义上来考虑它们, 事情就会变得容易多了. 若在平面上取两个互相垂直的轴, 再用通常的方法在这两个轴上安置上 x 值及 y 值, 那么正像大家所知道的, 由每一对 (x, y) 可以唯一地确定平面上的一点, 它以这些数值作为自己的坐标, 反之亦然.

于是为了想要表示出那些使函数有定义的数对 (x, y), 最简单的办法就是去指出它们所对应的点在 xy 平面上填满了怎样的一个图形.

于是就说, 函数 1) 是确定在全平面上, 函数 2) 及 3) 是分别地确定在闭圆 (即是, 包括圆周) 及开圆 (除去圆周; 图 52) 上; 函数 4) 是确定在矩形 (图 53) 上; 最后函数 5) 只能在开的三角形 (图 54) 中去考虑.

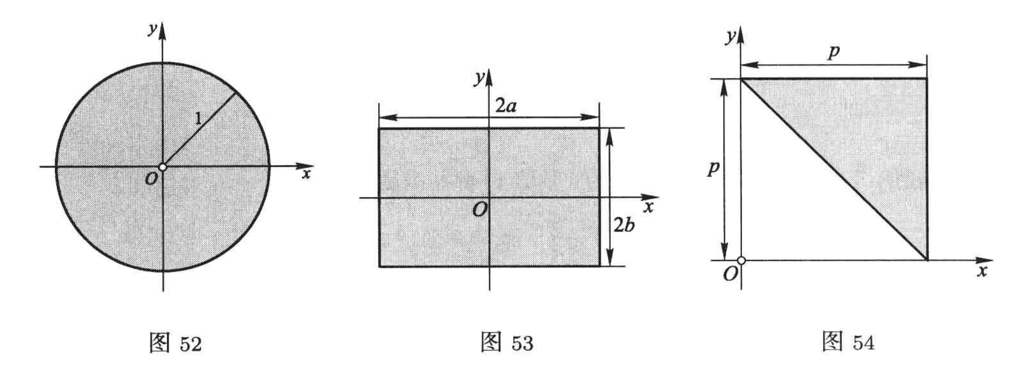


图 52　　图 53　　图 54

这种几何的解释是如此的方便, 以致通常就把数对 (x, y) 叫做 "点", 而这种 "点" 的集合也就按照它所对应的几何形状的名称来叫它. 于是, 满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b \quad c \leqslant y \leqslant d$$

的 "点" 集或数对 (x, y) 的集合是个 "矩形", 它的度量等于 $b - a$ 及 $d - c$; 与区间的表示法相类似我们将用符号 $[a, b; c, d]$ 来表示这一矩形. 满足不等式

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant r^2$$

的 "点" 集或数对 (x, y) 的集合是半径为 r 而圆心在 "点" (α, β) 的 "圆", 等等.

恰像函数 $y = f(x)$ 可以用它的图形从几何上去说明 [**19** 段] 一样, 方程 $z = f(x, y)$ 也可以从几何上去给以说明. 在空间取 x 轴, y 轴及 z 轴所成的直角坐标系,

再在平面 xy 上描出变量 x 及 y 的变化区域 $\mathscr{M}$, 最后, 在这个区域的每一点 $M(x,y)$ 上作平面 xy 的垂线, 而且在每条垂线上按照数值 $z=f(x,y)$ 来取定一点. 这样所得的点的轨迹就是我们函数的一种空间图形. 一般地说来, 这是一个曲面, 等式 $z=f(x,y)$ 也就叫做曲面的方程.

例如, 在图 55 及图 56 上画出的就是函数

$$z=x^2+y^2 \quad \text{及} \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

的几何图形.

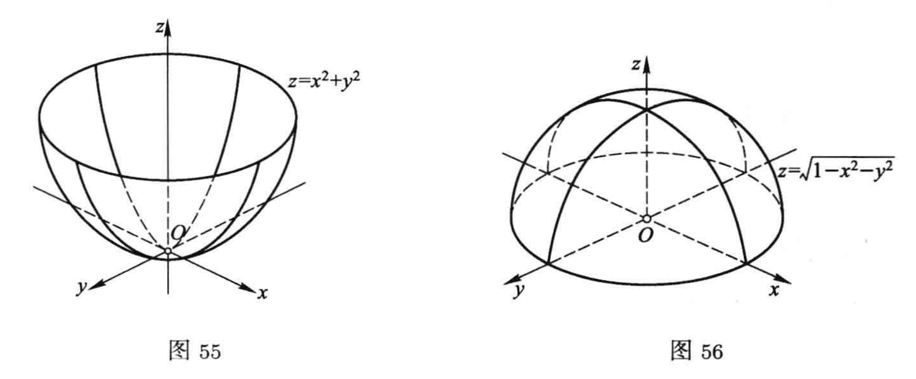


图 55 图 56

其中第一个图形是旋转抛物面, 而第二个是半球面.

125. m **维算术空间** 在论及 m 个自变量 $(m \geqslant 3)$ 的函数时, 我们先来讨论这些变量同时所取的数值组.

在 $m=3$ 时, 由三个数 x,y 及 z 所成的这种数值组 (x,y,z), 读者都明白, 也还可以几何地解释为空间的点, 而这种数值组的集合则可以解释为空间的一部分, 或几何学上的体. 但在 $m>3$ 时就已经不可能再有直接的几何意义了.

然而由于想把这些几何方法 (它对于两个及三个变量的函数来说是显得极有效的) 推广到更多个变量的函数的理论上去, 于是在分析学中也就引入了 $m(m>3)$ 维"空间"的概念.

由 m 个实数所成的组: $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$①叫做 m 维的"点"; 而数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 就是这"点" M 的坐标. 一切可能得到的 m 维的"点"的集合就组成一个 m 维"空间", 它有时也叫做算术空间.

"m 维的点"以及"m 维 (算术) 空间"这些概念是黎曼②首先想到的, 但是名词却是康托尔取定的.

现在可以合理地引入两个 m 维"点"

$$M(x_1,x_2,\cdots,x_m) \quad \text{与} \quad M'(x'_1,x'_2,\cdots,x'_m)$$

①由于变量的个数并不一定, 所以不用不同的字母, 而用只具有不同序号的同一字母去表示它们, 还显得比较方便些. 这样 x_i 表示的 (与以前的用法相反) 并非是某个变量的第 i 个值, 而是第 i 个变量本身, 它自己也可以取不同的值.

②贝恩哈德 · 黎曼 (1826—1866) 是杰出的德国数学家.

之间的"距离" $\overline{MM'}$ 的概念. 仿效解析几何学中大家知道的公式, 令

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i' - x_i)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \cdots + (x_m' - x_m)^2}; \tag{1}$$

在 $m = 2$ 或 3 时, 这个"距离"是与对应的两个几何点之间的通常相一致的.

若再取一点

$$M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_m''),$$

则也可以证明, "距离" $\overline{MM'}, \overline{M'M''}$ 及 $\overline{MM''}$ 满足不等式

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \tag{2}$$

它与已知的几何定理"三角形的一边不大于其他两边之和"很相似.

实际上, 对于任何两组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 常成立不等式

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}\,^{①}.$$

这里若令

$$a_i = x_i' - x_i, \quad b_i = x_i'' - x_i', \quad 于是 \quad a_i + b_i = x_i'' - x_i, \quad 则得$$
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'' - x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i' - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'' - x_i')^2},$$

这个式子与 (2) 相当. 这样, 在我们的"空间"中才能具备距离的这一重要性质.

---

① 若把它的两边各自平方, 再消去两边的相等的项, 则这一不等式就化成著名的柯西不等式:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

我们顺便要指出, 如何可以用初等方法去证明后一不等式成立. 二次三项式

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i^2 + 2x \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i b_i + \sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

不取负值. 因而它不能有不同的实根, 于是它的判别式也就不能是负的:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i^2 - \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right\}^2 \geqslant 0,$$

这就是柯西不等式.

也可以在 m 维 "空间" 中考虑 "直线". 读者都记得, 在平面 x_1x_2 上直线是由方程 $\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}$ 来确定的, 而在空间 $x_1x_2x_3$ 是由方程组 $\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}=\frac{x_3-\beta_3}{\alpha_3}$ 来确定的 (此处这些系数 α 不能够同时为零). 类似于此, 满足方程组

$$\frac{x_1-\beta_1}{\alpha_1}=\frac{x_2-\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{x_m-\beta_m}{\alpha_m}$$

(在 α 满足前述的条件之下) 的 "点" $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 集就叫做 m 维 "空间" 中的 "直线". 如果用 t 表示这些比式的公共值, 则 "直线" 也可用参数方程:

$$x_1=\alpha_1t+\beta_1,\quad x_2=\alpha_2t+\beta_2,\cdots,\quad x_m=\alpha_mt+\beta_m$$

来确定, 式中假定参变量 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$. 我们将认为这一直线上的 "点" 是依着参变量上升的次序一个跟着一个的; 若 $t'<t<t''$, 则在对应的 "点" M',M,M'' 中 "点" M 就恰好位于其他两点之间, 因为它在 M' 之后而又在 M'' 之前. 在这些条件之下, 很容易证明, 它们彼此间的距离满足关系式

$$\overline{M'M''}=\overline{M'M}+\overline{MM''},$$

这正是在通常空间中的直线的特性.

经过给定的两 "点"

$$M'(x_1',\cdots,x_m')\quad \text{及}\quad M''(x_1'',\cdots,x_m'')$$

的 "直线" 的方程显然可以写成:

$$x_1=x_1'+t(x_1''-x_1'),\quad \cdots,\quad x_m=x_m'+t(x_m''-x_m')$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

于此在 $t=0$ 及 $t=1$ 时就得到 "点" M' 及 M''. 又若使 t 从 0 变到 1, 则得到连接这两 "点" 的 "直线段".

最后, 若有几个 "线段" $M'M_1,M_1M_2,\cdots,M_kM''$, 它们一个挨着一个地连接起来, 则就组成了 m 维 "空间" 中的一条 "折线".

126. m 维空间中的区域举例 现在我们来考虑 m 维 "空间" 中几个最简单的 "体" 或 "区域".

1) 坐标彼此独立地满足于不等式

$$a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\quad a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,\quad a_m\leqslant x_m\leqslant b_m$$

的一切 "点" $M(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 所成的集合, 叫做 m 维 "长方体", 并且记作:

$$[a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_m,b_m].$$

特别在 $m=2$ 时, 就由此得出在 **124** 段中曾经讲到过的 "长方形"; 而三维 "长方体" 就是通常空间中的长方体.

若在前面写着的关系式中去掉等号:

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \cdots, \quad a_m < x_m < b_m,$$

则就可用它们来确定一个开的 "长方体":

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_m, b_m),$$

为了区别于前面所考虑过的那个, 就叫做闭的 "长方体". 差 $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \cdots, b_m - a_m$ 就叫做这两种长方体的度量, 而点

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \cdots, \frac{a_m+b_m}{2}\right)$$

叫做它们的中心.

以 "点" $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 为中心的任意一个开的 "长方形":

$$(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1; x_2^0 - \delta_2, x_2^0 + \delta_2; \cdots; x_m^0 - \delta_m, x_m^0 + \delta_m) \tag{3}$$

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m > 0)$ 叫做 "点" M_0 的邻域; 最常遇到的邻域是 "立方体":

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \cdots; x_m^0 - \delta, x_m^0 + \delta)$$

$(\delta > 0)$, 它的所有的度量都相等 $(= 2\delta)$.

2) 考虑满足于不等式

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots + (x_m - x_m^0)^2 \leqslant r^2 (\text{或} \ < r^2)$$

的一切 "点" $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 所成的集合, 式中 $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 是个定 "点", 而 r 是正常数. 这个集合叫做闭的 (或开的) m 维 "球", 其半径为 r, 而中心在 "点" M_0 处. 换句话说, 球是所有与某一定 "点" M_0 的 "距离" 不超过 (或小于) r 的点 M 所成的集合. 很明显, 这个 "球" 在 $m=2$ 时就是圆 [参看 **124** 段], 而在 $m=3$ 时就是通常的球.

以 "点" $M_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 为中心, 任意 $r>0$ 为半径的开 "球" 也同样可以认为是点 M_0 的邻域; 为了有别于那种前面曾经引入的 "长方体形" 的邻域起见, 这就叫做 "球形" 的邻域.

现在就搞清楚以下的事实是有好处的. 若 "点" M_0 是上述的任一类型的某个邻域的中心, 则它也一定可以是另一类型的某个邻域的中心, 且使这个邻域包含在前一个之中.

首先假设给定中心在 "点" M_0 处的 "长方体"(3). 于是只要取这样的开 "球", 它也有同一个中心 M_0 而半径 r 小于一切的 $\delta_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 则这个球就可包含

在所谓的 “长方体” 内了. 实际上, 对于这个 “球” 内的任一 “点” $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 将有 (对每个 i):

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

或

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

于是这点必属于所给的 “长方体”.

反之, 若给定中心在 M_0 而半径为 r 的 “球”, 则在它的里面也一定可以包含一个 “长方体” (3), 例如, 令 $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = \dfrac{r}{\sqrt{m}}$ 即可. 这是因为, 这个 “长方体” 中的任一 “点” $M(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 与 M_0 的 “距离” 是

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\delta_k^2} = r,$$

因此, 这点就属于所给的 “球” 了.

127. 开区域及闭区域的一般定义 若 “点” $M'(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ 连同它的某一个充分小的邻域都属于 m 维 “空间” 中的集合 $\mathscr{M}$, 则称 “点” M' 为集合 $\mathscr{M}$ 的内“点”. 由前段末所证明的论断显然可以推得, 这个定义中所指的邻域不论是哪种类型 —— 是 “长方体形的” 或是 “球形的”—— 都是一样.

开的 “长方体”

$$(a_1, b_1; \cdots; a_m, b_m) \tag{4}$$

中的每一个 “点” 都是它的内点. 实际上, 若

$$a_1 < x_1' < b_1, \cdots, a_m < x_m' < b_m,$$

则很容易找到这样的 $\delta > 0$, 使得

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b_1, \cdots, a_m < x_m' - \delta < x_m' + \delta < b_m.$$

类似地, 对于中心在 “点” M_0 处而半径为 r 的开 “球”, 属于它的每一个点 M' 也都是它的内点. 因为若取 ρ 使适合

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0},$$

且以 M' 为中心作半径为 ρ 的 “球”, 则它就会完全包含在原先的 “球” 内: 因为只要 $\overline{MM'} < \rho$ 就有 [**125** 段, (2)]

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r,$$

于是“点” M 也属于原先的“球”.

这种完全都是由内“点”组成的集合就叫做**开**“区域”.

这样, 开的“长方体”以及开“球”都是开“区域”的一些例子.

现在把聚点的概念 [**32** 段] 推广到 m 维“空间”中的集合 $\mathscr{M}$ 的情形上去, 若在“点” M_0 的每个邻域(仍旧不论是哪种类型)中总含有至少集合 $\mathscr{M}$ 中的一个非 M_0 的“点”, 则 M_0 就叫做集合 $\mathscr{M}$ 的“**聚点**”.

开“区域”的“聚点”而不属于这个区域的叫做它的界“点”. 界点的全体组成“区域的边界”. 开“区域”和它的“边界”一起就叫做闭“区域”.

不难看到, 开的“长方体”(4) 的界“点”就是那一些“点” $M(x_1, \cdots, x_m)$, 它们满足不等式

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \cdots, a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

并且至少其中有一个 $x_i = a_i$ (或 $x_i = b_i$).

完全与此相同, 上面所考虑过的开“球”的界“点”就是那些恰好能有 $\overline{MM_0} = r$ 的“点” M.

因此, 闭的“长方体”与闭“球”就给出了闭“区域”的一些例子.

以后凡是谈到“区域”, 开的或闭的, 我们总是指的这里所说的有特殊意义的“区域”而言.

现在来证明闭“区域”的所有的“聚点”仍然都属于这个“区域”.

设给定闭“区域” $\overline{\mathscr{D}}$ 及其外的一“点” M_0, 要来证明 M_0 不是 $\overline{\mathscr{D}}$ 的“聚点”.

闭“区域” $\overline{\mathscr{D}}$ 是由某个开“区域” $\mathscr{D}$ 加上它的“边界” $\mathscr{E}$ 而得出的, 显然 M_0 不能是 $\mathscr{D}$ 的“聚点”; 因此 M_0 可以被这样的一个开“球”所包围, 使在它的里面绝不含有 $\mathscr{D}$ 的“点”. 于是在它里面也就不能有 $\mathscr{E}$ 的“点”; 否则, 若含有 $\mathscr{E}$ 的任何一“点” M', 也就会含有“点” M' 的某个邻域的全部, 而在这个邻域内却又连一个 $\mathscr{D}$ 的点都没有, 这与 M' 为 $\mathscr{D}$ 的“界点”的定义相矛盾. 所以在上述的开“球”内确乎没有 $\overline{\mathscr{D}}$ 中的“点”, 这就证明了我们的论断.

一般地, 含有自己的一切“聚点”的“点”集 $\mathscr{M}$ 就叫做闭集. 这样, 闭“区域”是闭集的特别情形.

在以上数段中所说的话都可以看成只是建立了某种几何语言;[①]在 $m > 3$ 时, 这些话并不与任何真实的几何概念有关. 然而着重地指出这点是有益处的, 就是事实上, m 维 (算术)“空间”只是将空间概念有效地推广到高阶去第一步, 而这些空间概念正是近世分析学中许多更高深分支的基础.

128. m 元函数 设有 m 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 它们同时所取的值可以从 m 维空间的某个点集 $\mathscr{M}$ 中任意选取, 则这些变量就叫做自变量. 对于两个自变量时所作的函数的定义以及关于它所讲的一切 [**124** 段] 都可以直接搬到现在所要考虑的情

①一切几何名词, 若在使用时其意义与通常的不同, 我们都已打上了引号, 如: “点”、“距离”、“区域”等等. 以后我们就不再这样做了.

形上来, 因此没有必要再去讨论它. 顺便提到, 第二章中所讲的单变量的函数就可以称为一元函数, 是 m 元函数的特例.

若用 M 表示点 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 则这些变量的函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 有时也叫做**点 M 的函数**, 并且记作: $u = f(M)$.

现在假定在 k 维空间的 (这里 k 与 m 无关) 某个点集 $\mathscr{T}$ 上给定了 k 个变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的 m 个函数

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_k), \cdots, \quad x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \cdots, t_k), \tag{5}$$

或简单地写成

$$x_1 = \varphi_1(P), \cdots, \quad x_m = \varphi_m(P), \tag{5a}$$

式中 P 表示 k 维空间的点 $(t_1, t_2, \cdots, t_k)$. 此外, 再假设当点 $P(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ 在集合 $\mathscr{T}$ 的范围内变化时, 与它对应的以 (5) 或 (5a) 为坐标的 m 维点 M 不会超出函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f(M)$ 的定义区域, 即 m 维集合 $\mathscr{M}$ 的范围.

于是变量 u 就可以看成是由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 作媒介的自变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ (在集合 $\mathscr{T}$ 上) 的**复合函数**:

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_k), \cdots, \varphi_m(t_1, t_2, \cdots, t_k));$$

u 是**函数** $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ **的函数** [参看 **25** 段].

这种用函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 以及函数 f 来确定复合函数的过程 (正像最简单的一元函数的情形一样) 叫做**叠置**.

一开始就会直接遇到的多元函数类并不是很大的. 实际上, 这类函数总是借助于叠置单变量初等函数 [**22** 段、**24** 段] 以及下列的二元函数:

$$z = x \pm y, \quad z = xy, \quad z = \frac{x}{y}, \quad z = x^y$$

(即四则运算及所谓**幂指函数**) 而成的.

对于自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 以及常量重复地使用四则运算, 首先就导出整多项式 (**有理整函数**):

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} C_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m} \text{①} \tag{6}$$

以及两个整多项式的商 (**有理分式函数**):

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_m^{\mu_m}}. \tag{7}$$

---

①我们知道, 记号 $\sum$ 表示同类项的总和. 这里我们有着加数依赖于几个标号的更为复杂的情形.

利用一元初等函数更可导出这样一些函数, 例如:

$$f(x,y,z)=\frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\varphi(x,y,z,t)=\sin xy+\sin yz+\sin zt+\sin tx,$$

等等.

在 **18** 段内那些关于单变量函数的解析表示法所作的附注在这里也是适用的.

129. 多元函数的极限 考虑 m 维空间内点的序列

$$\{M_n(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_m^{(n)})\}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{8}$$

如果点 M_n 的坐标都一个个地趋向于点 $M_0(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的对应坐标, 就是, 若在 $n\to\infty$ 时

$$x_1^{(n)}\to a_1,\quad x_2^{(n)}\to a_2,\quad\cdots,\quad x_m^{(n)}\to a_m,\tag{9}$$

则我们就说, 这个序列收敛于*极限点* M_0. 条件 (9) 也可以代之以要求点 M_n 与 M_0 之间的距离趋向于零

$$\overline{M_0M_n}\to 0.\tag{10}$$

这两个定义的等价性可以从 **126** 段内所作的关于两种类型的邻域的论证来推出. 其实, 条件 (9) 表示着: 不论 $\delta>0$ 是怎样的一个数, 点 M_n 只要在 n 充分大时就可以满足不等式

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\delta,\quad\cdots,\quad|x_m^{(n)}-a_m|<\delta,$$

即 M_n 包含在以点 M_0 为中心的开长方体

$$(a_1-\delta,a_1+\delta;\cdots;a_m-\delta,a_m+\delta)$$

内; 而条件 (10) 的意义则是, 不论 $r>0$ 是怎样的一个数, 点 M_n 只要在 n 充分大时就可以满足不等式

$$\overline{M_0M_n}<r,$$

即 M_n 落在仍以点 M_0 为中心以 r 为半径的开球内.

设在 m 维空间内给定了某一点集 $\mathscr{M}$, 而点 $M_0(a_1,\cdots,a_m)$ 是它的*聚点*. 于是一定可以从 $\mathscr{M}$ 中取出这样的点列 (8), 其中每一点都不是 M_0, 并且它以 M_0 为极限点而收敛.

现在假定在上述的集合上定义了函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$. 类似于一元函数的情形, 我们说:

函数 $f(x_1,\cdots,x_m)=f(M)$ 当变量 $x_1,\cdots,x_m$ 分别趋向于 $a_1,\cdots,a_m$ (或简单地, 当点 M 趋向于点 M_0) 时以数 A 为极限, 如果不论从 $\mathscr{M}$ 中怎样取异于

$M_0(a_1, \cdots, a_m)$ 的且收敛于 M_0 的序列 (8), 由对应的函数值所组成的序列 $\{f(x_1^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)})\} = \{f(M_n)\}$ 恒收敛于 A.

这一事实记作:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \cdots, x_m),$$

或简单地记作

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

很容易把函数极限的定义扩充到当数 $A, a_1, \cdots, a_m$ 中有几个或全部为无穷大的情形.

我们着重指出, 即对于多元函数, 函数的极限概念也可以这样地化为序列极限的概念.

然而这种极限的定义也可以用 "$\varepsilon - \delta$ 的语言" 来给出, 而不必提到序列. 当数 $A, a_1, \cdots, a_m$ 都是有限时, 这个定义就是:

我们说, 函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 当变量 $x_1, \cdots, x_m$ 分别趋向于 $a_1, \cdots, a_m$ 时以数 A 为极限, 如果对于每一个数 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样的数 $\delta > 0$, 使得只要

$$|x_1 - a_1| < \delta, \cdots, |x_m - a_m| < \delta,$$

就有

$$|f(x_1, \cdots, x_m) - A| < \varepsilon.$$

这时先得假定点 $(x_1, \cdots, x_m)$ 是取自 $\mathscr{M}$ 且异于 $(a_1, \cdots, a_m)$ 的. 因此, 对于集合 $\mathscr{M}$ 中位于点 M_0 的充分小邻域

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \cdots; a_m - \delta, a_m + \delta)$$

之内, 但除去这点本身 (如果它属于 $\mathscr{M}$ 的话) 的一切点, 上面的关于函数 f 的不等式都应该成立的.

把点 $(x_1, \cdots, x_m)$ 及 $(a_1, \cdots, a_m)$ 记成 M 及 M_0, 于是上面所讲的定义还可以用几何的语言说成这样: *数 A 叫做函数 $f(M)$ 当点 M 趋向于点 M_0 时 (或在点 M_0 处) 的极限, 如果对于每一个数 $\varepsilon > 0$ 存在着这样的数 $r > 0$, 使得只要距离 $\overline{M_0M} < r$, 就有*

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

与前面一样, 点 M 必须假定是取自 $\mathscr{M}$ 且异于 M_0 的. 由此, 对于集合 $\mathscr{M}$ 中位于点 M_0 的充分小的*球形*邻域之内但除去这点本身的一切点, 这个关于函数的不等式都应该成立.

由 **126** 段关于两种类型的邻域的讨论就可立刻明白, 函数极限的新定义的这两种形式是等价的.

至于谈到函数极限的新定义和以前所给的“用序列的语言”所下的定义之间的等价性问题, 则也可以像在一元函数时 [33 段] 一样来建立.

最后请注意, 所有在前面建立起来的极限理论 [第三章] 都可以推广到多元函数的一般情况上来. 而且绝大部分的推广还可以不必经过丝毫的改动, 这是因为这里的一切也都可以归之于序列问题 [参看 42 段].

130. 例 1) 首先利用积的极限定理, 容易证明

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} Cx_1^{\nu_1}\cdots x_m^{\nu_m}=Ca_1^{\nu_1}\cdots a_m^{\nu_m},$$

其中 $C,a_1,\cdots,a_m$ 是任意的实数, 而 $\nu_1,\cdots,\nu_m$ 是非负的整数. 由此, 若用 $P(x_1,\cdots,x_m)$ 表示有理整函数 (6), 则依照和的极限定理, 可以得出

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} P(x_1,\cdots,x_m)=P(a_1\cdots,a_m).$$

类似地对于有理分式函数 (7), 依照商的极限定理, 就有

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_m\to a_m}} Q(x_1,\cdots,x_m)=Q(a_1,\cdots,a_m),$$

当然, 这个等式只能在分母在点 $(a_1,\cdots,a_m)$ 处不为零的条件下成立.

2) 考虑当 $x>0$ 及任意 y 时的幂指函数 x^y. 于是, 若 $a>0$ 而 b 是一个任意的实数, 就有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y=a^b,$$

实际上, 若取任意的依赖于 n 的变量 $x_n\to a$ 及 $y_n\to b$, 则 [参看 **66** 段]

$$x_n^{y_n}=e^{y_n\cdot\ln x_n}\to e^{b\cdot\ln a}=a^b,$$

而这 —— 用“序列的语言”来说 —— 就证实了所要求的结果.

3) 讨论极限:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2},$$

这里函数确定于全平面上, 仅点 $x=0,y=0$ 除外.

若取两个部分点序列

$$\left\{M_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}\quad 及\quad \left\{M_n'\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\},$$

它们显然都收敛于点 $(0,0)$, 则对于一切的 n 都有

$$f(M_n)=f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\quad 而\quad f(M_n')=f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{5}.$$

由此就已推得, 上述的极限并不存在.

类似可以确信极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

并不存在.

4) 相反地, 以下的极限却是存在的:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

这可以从不等式

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|$$

立刻推出.

131. 累次极限 除了上面所考虑的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 当其一切变元同时趋向于各自的极限时所得的极限之外, 还要来讨论另一种的极限, 它是由各个变元依着某一种次序相继地分别取极限而得出的. 前一种极限叫做 m 重极限 (或在 $m = 2, 3, \cdots$ 时叫做二重极限、三重极限等等), 而后一种叫做累次极限.

为了简单起见, 限于讨论二元函数 $f(x, y)$ 的情形. 假设变量 x, y 的变化区域 $\mathscr{M}$ 是这样的, 就是 x (与 y 无关地) 可以取集合 $\mathscr{X}$ 内的任一数值, 而 a 为 $\mathscr{X}$ 的聚点, 但不属于 $\mathscr{X}$, 同样, y (与 x 无关地) 在集合 $\mathscr{Y}$ 内变化, 而 b 为 $\mathscr{Y}$ 的聚点, 但不属于 $\mathscr{Y}$. 这样的区域 $\mathscr{M}$ 可以记成 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. 例如,

$$(a, a+H; b, b+K) = (a, a+H) \times (b, b+K).$$

若对于 $\mathscr{Y}$ 中任一固定的 y, 函数 $f(x, y)$ (它就只是 x 的函数) 在 $x \to a$ 时的极限存在, 则这个极限, 一般地说, 将与预先固定的 y 值有关:

$$\lim_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y).$$

其次可以讨论函数 $\varphi(y)$ 在 $y \to b$ 时的极限:

$$\lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y);$$

这就是两个累次极限中的一个. 另外一个也可以在相反的次序上去取极限, 得出

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y).$$

不要以为这些累次极限必定是相等的.

例如, 若在区域 $\mathscr{M}(0, +\infty; 0, +\infty)$ 上令:

1) $$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

且取 $a = b = 0$, 则得

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x, y) = y - 1, \quad \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y) = -1,$$

而同时却有

$$\psi(x) = \lim_{y\to 0} f(x, y) = x + 1, \quad \lim_{x\to 0} \psi(x) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y) = 1.$$

也可能发生这样情形, 就是累次极限中的一个存在, 而另一个却不存在, 例如, 函数:

2) $f(x,y)=\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}+y}{x+y}$ 或 3) $f(x,y)=x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$

就是这样的; 这两个例中都是累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f$ 存在, 而累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f$ 不存在 (在后一例中, 甚至第一次极限 $\lim\limits_{y\to 0}f$ 已不存在).

这些简单的例子指出了, 对于两个不同变量的极限过程在交换其次序的时候应该要多么地小心谨慎: 错误的推断常常就是发生在这种不合法的交换上面, 而同时分析上的许多重要问题却又正好是与极限过程的交换次序有关, 但是当然, 每一次交换的合法性都是应当加以论证.

下面的重要定理打开了进行这种论证一个途径, 同时它又建立起二重极限与累次极限之间的一种关系:

定理 若 1) (有限的或无穷的) **二重**极限

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)$$

存在且 2) 对 $\mathscr{Y}$ 中任一个 y 有关于 x 的 (有限的) **单重**极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to a}f(x,y)$$

存在, 则**累次**极限

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)$$

也存在, 且等于**二重**极限.

我们来在 A,a 及 b 为有限数时来证明这个定理. 根据 "用 $\varepsilon-\delta$ 语言" 来下的 [**129** 段] 函数极限的定义, 依给定的 $\varepsilon>0$, 必可找得这样的 $\delta>0$, 使得只要 $|x-a|<\delta$ 及 $|y-b|<\delta$ (并且 x 取自 $\mathscr{X}$, 而 y 取自 $\mathscr{Y}$), 就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon. \tag{11}$$

现在固定 y 值使其满足不等式 $|y-b|<\delta$, 再在 (11) 式中使 $x\to a$ 而求极限. 因为根据假设 2), 这时 $f(x,y)$ 趋向于极限 $\varphi(y)$, 于是得到

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon.$$

当想到这里的 y 是 $\mathscr{Y}$ 中的任意数, 而仅受条件 $|y-b|<\delta$ 的限制时, 就得出结论

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y),$$

这就是所要求证的.

若是除了条件 1) 及 2) 以外, 又有: 对 $\mathscr{X}$ 中任一个 x 有关 y 的 (有限的)单重极限

$$\psi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

存在, 则从刚才的证明中把 x 与 y 对调一下, 即知第二个累次极限

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

也存在, 而且等于同一个数 A. 在这情形两个累次极限相等.

从已证明的定理立刻就可明白: 在例 1) 及 2) 中二重极限都不存在. 这也可以很容易地直接证实.

相反地, 在例 3) 中二重极限却是存在: 由不等式

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leqslant |x|$$

可以看出, 它等于零. 这个例子就说明了, 由定理的条件 1) 并不能引出条件 2).

但是, 不要以为二重极限的存在是累次极限相等的必要条件: 在第 **130** 段的例 3) 中, 虽然二重极限并不存在, 但两个累次极限却都存在且都等于零.

§2. 连续函数

132. 多元函数的连续性及间断 设函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 定义在 m 维空间的某个点集 $\mathscr{M}$ 上, 而 $M'(x_1', \cdots, x_m')$ 是这个点集的聚点, 并且还属于这个点集.

若等式

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_m \to x_m'}} f(x_1, \cdots, x_m) = f(x_1', \cdots, x_m') \tag{1}$$

成立, 就说函数 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 在点 $M'(x_1', \cdots, x_m')$ 连续; 否则, 就说函数在点 M' 有了**间断**.

函数在点 M' 的连续性若用 "$\varepsilon - \delta$ 的语言" [**129** 段] 来说就是: 对于任一给定的 $\varepsilon > 0$, 一定可以找到这样的 $\delta > 0$, 使得只要

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \cdots, |x_m - x_m'| < \delta \tag{2}$$

就有

$$|f(x_1, \cdots, x_m) - f(x_1', \cdots, x_m')| < \varepsilon, \tag{3}$$

或换一种说法: 对 $\varepsilon > 0$, 一定可以找到这样的 $r > 0$, 使得只要距离

$$\overline{MM'} < r,$$

就有

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon.$$

这时点 $M(x_1, \cdots, x_m)$ 预先就假定是属于集合 $\mathscr{M}$ 的, 特别地还可以重合于 M'. 这是因为函数在点 M' 的极限恰好等于在这点的函数值, 所以 M 必须异于 M' 这个通常的要求在这里就不再需要了.

把差 $x_1 - x_1', \cdots, x_m - x_m'$ 看作是自变量的增量 $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_m$, 而把差

$$f(x_1, \cdots, x_m) - f(x_1', \cdots, x_m')$$

看作是函数的增量, 就可以 (像在一元函数的情形那样) 说: 若对应于诸自变量的无穷小增量, 函数的增量也是无穷小, 则函数**连续**.

上面所定义的函数在点 M' 的连续性可以说是对于变量 $x_1, \cdots, x_m$ 全体的连续性. 如果函数在点 M' 连续, 那么同时也有

$$\lim_{x_1 \to x_1'} f(x_1, x_2', \cdots, x_m') = f(x_1', x_2', \cdots, x_m'),$$
$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ x_2 \to x_2'}} f(x_1, x_2, x_3', \cdots, x_m') = f(x_1', x_2', x_3', \cdots, x_m'),$$

等等, 因为这里我们只不过是依着一些特殊的规律让 M 去接近 M'. 换句话说, 函数对于每个变量 x_i, 或对于每一对变量 x_i, x_j等等也都是连续的.

我们已经遇到过连续函数的例子. 像在 **130** 段, 1) 中已经证明了 m 元的有理整函数及有理分式函数在 m 维空间的一切点上 (对于分式函数要除去使分母等于零的那些点) 的连续性. 又在同段 2) 中已证明幂指函数 x^y 在右半平面 $(x > 0)$ 的一切点上的连续性.

若再考虑由分式

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

在除去原点以外的全平面上所确定的函数, 且又假定 $f(0, 0) = 0$, 则得出间断的例子. 间断恰好就发生在原点, 因为 [**130** 段, 3)] 当 $x \to 0, y \to 0$ 时, 函数的极限并不存在.

这里我们遇到了这样有趣的情况. 所考虑的函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 对于两个变量全体而言, 纵然是不连续的; 但是函数在这点对于 x 以及对于 y 分别而言, 由于 $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, 却又都是连续的. 不过如果考虑到: 当我们说到对于 x 或 y 分别的连续性时, 我们就只考虑沿着 x 轴或 y 轴接近于点 $(0, 0)$ 的问题, 而并不顾及无限多种其他接近于 $(0, 0)$ 的规律, 那么上述的现象其实并不奇怪.

附注 柯西在他的《代数分析》中曾经试图去证明: 若多元函数分别地对于每个变量都连续, 则它就对于变量的全体连续. 上面的例子恰好否定了这个论断.

如果函数 $f(M)$ 当 M 趋向于 M' 时根本没有一定的有限极限

$$\lim_{M \to M'} f(M)$$

存在, 就说, 函数在点 M' 有间断: 甚至当函数在点 M'未确定时也这样说.

133. 连续函数的运算 很容易叙述并且证明关于两个连续函数的和、差、积、商的连续性定理 [参看 **62** 段]; 现在就把这件事留给读者自己去做.

我们只讨论关于连续函数叠置的定理. 如同在 **128** 段中一样, 我们假定函数 $u = f(x_1, \cdots, x_m)$ 给定在 m 维点 $M(x_1, \cdots, x_m)$ 的集合 $\mathscr{M}$ 上, 此外, 又假定在 k 维点 $P(t_1, \cdots, t_k)$ 的集合 $\mathscr{T}$ 上定义了 m 个函数

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \cdots, t_k), \cdots, x_m = \varphi_m(t_1, \cdots, t_k) \tag{4}$$

而且以 (4) 为坐标的点 M 不超出上述集合 $\mathscr{M}$ 范围之外.

定理 *若函数 $\varphi_i(P)$ $(i = 1, 2 \cdots, m)$ 在 $\mathscr{T}$ 中的点 $P'(t'_1, \cdots, t'_k)$ 处连续, 而 $f(M)$ 在相应的坐标为*

$$x'_1 = \varphi_1(t'_1, \cdots, t'_k), \cdots, x'_m = \varphi_m(t'_1, \cdots, t'_k)$$

的点 $M'(x'_1, \cdots, x'_m)$ 处连续, 则复合函数

$$\begin{aligned} u &= f(\varphi_1(t_1, \cdots, t_k), \cdots, \varphi_m(t_1, \cdots, t_k)) \\ &= f(\varphi_1(P), \cdots, \varphi_m(P)) \end{aligned}$$

也在 P' 点连续.

实际上, 首先由 $\varepsilon > 0$ 可确定一个数 $\delta > 0$, 使得由 (3) 即可得 (2) (由于函数 f 的连续性). 然后由数 δ (由于函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 的连续性) 又可找到数 $\eta > 0$, 使得由不等式

$$|t_1 - t'_1| < \eta, \cdots, |t_k - t'_k| < \eta, \tag{5}$$

即可得不等式

$$\begin{aligned} &|x_1 - x'_1| = |\varphi_1(t_1, \cdots, t_k) - \varphi_1(t'_1, \cdots, t'_k)| < \delta, \cdots, \\ &|x_m - x'_m| = |\varphi_m(t_1, \cdots, t_k) - \varphi_m(t'_1, \cdots, t'_k)| < \delta. \end{aligned}$$

但是, 再由 (5) 即有

$$\begin{aligned} &|f(x_1, \cdots, x_m) - f(x'_1, \cdots, x'_m)| \\ = &|f(\varphi_1(t_1, \cdots, t_k), \cdots, \varphi_m(t_1, \cdots, t_k)) \\ &-f(\varphi_1(t'_1, \cdots, t'_k), \cdots, \varphi_m(t'_1, \cdots, t'_k))| < \varepsilon, \end{aligned}$$

故我们的论断得证.

134. 关于函数取零值的定理 现在我们来研究连续于 m 维算术空间[①]区域 $\mathscr{D}$ 上每一点 (或简言之, 就是连续于区域 $\mathscr{D}$ 上) 上的多元函数的性质. 这些性质与区间上连续一元函数的性质 (第四章, §2) 完全相似.

为了叙述简明起见, 我们限于两个变量的情况. 要直接推广到一般的情况去, 是毫无困难的. 然而, 有时也要顺便作些说明.

为了陈述类似于波尔查诺 – 柯西第一定理 [第 **68** 段] 的定理, 我们还需要连通区域的概念: 连通区域是这样的区域, 其中任意两点都可以用全由区域内的点所组成的折线 [第 **125** 段] 联结起来.

定理 设函数 $f(x,y)$ 定义并且连续于某个**连通**区域 $\mathscr{D}$ 中. 若在区域中两点 $M'(x',y')$ 与 $M''(x'',y'')$ 上函数取异号值

$$f(x',y')<0,\quad f(x'',y'')>0,$$

则在此区域中一定可以找到这样的点 $M_0(x_0,y_0)$, 在其上函数取零值:

$$f(x_0,y_0)=0.$$

我们把它化为单变量函数来证明.

由于区域 $\mathscr{D}$ 的连通性, 可以用 $\mathscr{D}$ 中的折线把 M' 与 M'' 两点联结起来 (图 57). 若在其某一顶点上函数 $f(x,y)$ 变为 0, 则本定理中的论断已成立. 反之, 则逐段来看这折线, 一定会找到其中一个直线段, 在其两端函数值异号. 因此, 可以不失一般性, 在一开始就设直线段 $M'M''$ 全在 $\mathscr{D}$ 中, 其方程为

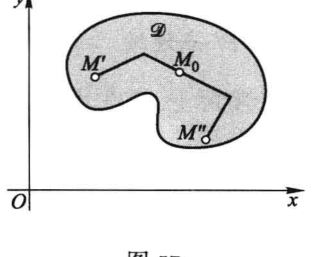


图 57

$$x=x'+t(x''-x'),$$
$$y=y'+t(y''-y')\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

若点 $M(x,y)$ 沿此线段运动, 则原来的函数 $f(x,y)$ 就变为单变量 t 的复合函数:

$$F(t)=f(x'+t(x''-x'),y'+t(y''-y')),$$

而由上段的定理, 它显然连续. 但对于 $F(t)$ 有

$$F(0)=f(x',y')<0,\quad 而\quad F(1)=f(x'',y'')>0;$$

应用第 **68** 段已经证明的定理必有 0 与 1 间的一值 t_0 使 $F(t_0)=0$. 再由 $F(t)$ 之定义有

$$f(x_0,y_0)=0,$$

① "区域" 的意义见第 **127** 段.

其中

$$x_0 = x' + t_0(x'' - x'), \quad y_0 = y' + t_0(y'' - y').$$

点 $M_0(x_0, y_0)$ 即是所求.

由此还可得到类似于波尔查诺 - 柯西第二定理的定理 (可以立刻得出).

读者可以看到, 这些结果推广到 m 维空间 $(m > 2)$ 去是并无任何困难的, 因为在 m 维连通区域中之各点仍可用折线联结, 于是问题和刚才一样就化为考察一个单变量的复合函数.

135. 波尔查诺 - 魏尔斯特拉斯引理 为了进一步叙述, 需要把第 **51** 段中的引理推广到任意维空间的点序列. 我们约定称这空间的点集 $\mathscr{M}$ 为有界的, 只要这集合能包含在某个 "长方体" 内. 像前面一样, 我们只限于 "平面" 情况.

从任一**有界**的点序列

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \cdots, \quad M_n(x_n, y_n), \cdots$$

中恒可以取出收敛于一极限点的部分序列

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}), \quad M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}), \quad \cdots, \quad M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}), \quad \cdots$$
$$(n_1 < n_2 < \cdots < n_k <, \cdots, n_k \to +\infty).$$

证明十分简单, 只要应用第 **51** 段中证得的关于线性序列的引理.

因序列设为有界, 因此其点皆含于某个矩形 $[a, b; c, d]$ 中, 故

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \quad c \leqslant y_n \leqslant d \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

现对序列 $\{x_n\}$ 应用第 **51** 段的引理, 自其中可取出一个部分序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于某极限 $\bar{x}$. 于是对于部分序列

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), \quad (x_{n_2}, y_{n_2}), \cdots, \quad (x_{n_k}, y_{n_k}), \quad \cdots$$

第一个坐标已经收敛. 再对第二个坐标的序列 $\{y_{n_k}\}$ 再次应用上述定理, 又可选出收敛于某个 $\bar{y}$ 的部分序列 $\{y_{n_{k_i}}\}$. 于是, 序列

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}), \quad (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \cdots, \quad (x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}), \cdots$$

显然收敛于极限点 $(\bar{x}, \bar{y})$.

这里的讨论也很容易推广到 $m > 2$ 维的空间: 只不过不是取两次部分序列, 而是取 m 次.

136. 关于函数有界性的定理 应用以上已证明的定理, 很容易对二元函数证明魏尔斯特拉斯第一定理:

定理 若函数 $f(x,y)$ 定义且连续于某个**有界闭**区域 $\mathscr{D}$ 中[①], 则它是有上下界的, 就是说, 函数值全部必介于两个有限界之间:

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M.$$

证明 (用反证法) 和第 **72** 段完全一样. 设当 (x,y) 在 $\mathscr{D}$ 中变化时 $f(x,y)$ 是无界的, 设为上无界. 则对任意的 n 在 $\mathscr{D}$ 中必有点 $M_n(x_n,y_n)$ 在, 使

$$f(x_n,y_n) > n. \tag{6}$$

依第 **135** 段之引理, 由序列 $\{M_n\}$ 之有界性, 可取出一部分序列 $\{M_{n_k}\}$ 收敛于极限点 $\overline{M}(\bar{x},\bar{y})$.

注意, 这点 $\overline{M}$ 必在区域 $\mathscr{D}$ 中. 若不然, 则它与 M_{n_k} 都不重合, 而应是 $\mathscr{D}$ 的聚点, 从而属于 $\overline{\mathscr{D}}$, 但由于 $\mathscr{D}$ 是闭区域, 故这不可能 [见 **127** 段].

由函数在 $\overline{M}$ 处的连续性应有

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k},y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\bar{x},\bar{y}),$$

但这与 (6) 矛盾.

魏尔斯特拉斯第二定理的叙述与证明 (应用上述定理) 都与第 **73** 段中完全一样.

注意, 不需作根本的变动即可把魏尔斯特拉斯的两个定理推广到连续于任意有界闭集 (不一定是区域) $\mathscr{M}$ 的函数上去.

正如对于一元函数一样, 对于定义在 $\mathscr{M}$ 上的有界函数, 其上下确界之差也叫做函数在这集合上的振幅. 若 $\mathscr{M}$ 有界而且是闭的 (特别地, 若 $\mathscr{M}$ 是有界闭区域) 而 f 连续于其上, 则振幅就是函数的最大值与最小值之差.

137. 一致连续性 我们知道, $f(x,y)$ 在定义域集合 $\mathscr{M}$ 的一个定点 (x_0,y_0) 处的连续性可用 "$\varepsilon-\delta$ 语言" 表达如下: 对任意 $\varepsilon>0$, 皆可找到 $\delta>0$, 使当对 $\mathscr{M}$ 中一切点 (x,y) 只要

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta$$

就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

现在设 $f(x,y)$ 连续于整个集合 $\mathscr{M}$ 上; 于是产生了一个问题, 对任一个 $\varepsilon>0$, 能否找到一个 $\delta>0$, 同时适用 —— 在上述意义下 —— 于 $\mathscr{M}$ 一切点 (x_0,y_0). 如果对任一 ε, 都是可能的, 就说函数在 $\mathscr{M}$ 上一致连续.

---

①但这一次不必要是连通区域.

康托尔定理 若函数 $f(x,y)$ 在**有界闭**区域 $\mathscr{D}$ 上连续, 则它在 $\mathscr{D}$ 上也一致连续.

我们用反证法来证明. 设对某一数 $\varepsilon>0$, 并不存在同时适用于 $\mathscr{D}$ 中一切点 (x_0,y_0) 的数 $\delta>0$.

取一串趋向 0 的正数

$$\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots>0;\quad \delta_n\to 0.$$

因为其中每一个 δ_n 都是不适用 —— 在上述意义下 —— 于 $\mathscr{D}$ 中一切点 (x_0,y_0) 的, 故对于 δ_n 必可在 $\mathscr{D}$ 中找到一个特定的点 (x_n,y_n), 对于它 δ_n 不适用. 即是说, 在 $\mathscr{D}$ 中存在着点 (x'_n,y'_n) 使

$$|x'_n-x_n|<\delta_n,\quad |y'_n-y_n|<\delta_n,$$

然而

$$|f(x'_n,y'_n)-f(x_n,y_n)|\geqslant\varepsilon. \tag{7}$$

由点序列 $\{(x_n,y_n)\}$ 的有界性, 按波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理, 可以取出一个部分序列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$, 使 $x_{n_k}\to\bar{x}, y_{n_k}\to\bar{y}$, 而极限点 $(\bar{x},\bar{y})$ 必属于区域 $\mathscr{D}$ (因它是闭的).

又因

$$|x'_{n_k}-x_{n_k}|<\delta_{n_k},\quad |y'_{n_k}-y_{n_k}|<\delta_{n_k},$$

而当 k 上升时, $n_k\to+\infty$ 而 $\delta_{n_k}\to 0$, 故

$$x'_{n_k}-x_{n_k}\to 0,\quad y'_{n_k}-y_{n_k}\to 0,$$

所以

$$x'_{n_k}\to\bar{x},\quad y'_{n_k}\to\bar{y}.$$

由于函数 $f(x,y)$ 的连续性, 在区域 $\mathscr{D}$ 中的点 $(\bar{x},\bar{y})$ 应有

$$f(x_{n_k},y_{n_k})\to f(\bar{x},\bar{y}),$$

同时

$$f(x'_{n_k},y'_{n_k})\to f(\bar{x},\bar{y}),$$

故

$$f(x_{n_k},y_{n_k})-f(x'_{n_k},y'_{n_k})\to 0,$$

但这与不等式 (7) 矛盾. 定理得证.

为了由此得出推论, 还需要点集合直径的概念: 这就是集合中任意两点距离的上确界.

推论　若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\mathscr{D}$ 上连续, 则对已知的 $\varepsilon>0$, 必可找到 $\delta<0$, 使得不论怎样将此区域分为部分闭区域 $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\cdots,\mathscr{D}_k$, [①]只要其直径小于 δ, 则在每一部分上, 函数的振幅都小于 ε.

只要把 δ 取作一致连续性定义中的 δ 即可. 若部分区域 $\mathscr{D}_i$ 的直径小于 δ, 则其中任意两点 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. 由此有 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$, 故 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 若把这两个点这样取, 使 $f(x,y)$ 与 $f(x_0,y_0)$ 分别是函数在 $\mathscr{D}_i$ 中的最大与最小值, 就得到所需的论断.

容易看到, 将这个定理推广到连续于有界闭集 $\mathscr{M}$ 的函数上去时, 其证明仍无须改变 (如同魏尔斯特拉斯定理).

①这些部分区域只有共同的界点.

第九章　多元函数的微分学

§1. 多元函数的导数与微分

138. 偏导数 为了书写和叙述的简单起见, 我们限于三元函数的情况; 然而以下的一切对于任意多元函数也是对的.

于是, 设在某一个 (开) 区域 $\mathscr{D}$ 中有函数 $u = f(x, y, z)$; 取此区域中一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$. 若给 y, z 以常值 y_0, z_0 而令 x 变化, 则 u 是单变量 x 在 x_0 邻域中的函数; 而可以提出在点 x_0 处计算导数的问题. 给 x_0 以增量 Δx, 于是函数也会得一增量

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

称为 f 对 x 的*偏增量*, 因为它只是由一个变量的改变而引起的. 由定义知导数即是以下的极限值:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

这个导数称为*函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处对于 x 的偏导数*.

我们可以看到, 在这定义中各个元的作用并不相同, y_0 与 z_0 是固定的, 而 x 则是变动的, 它趋向 x_0.

偏导数可以用以下的符号之一来表示:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}①; \quad u'_x, \quad f'_x(x_0, y_0, z_0); \quad D_x u, \quad D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

①在记偏导数的时候, 通常用弯的 ∂ 而不用直的 d.

要注意, 这些记号下的 x 仅是表示对那一个变量求导数, 而与在什么点 (x_0, y_0, z_0) 处去计算导数无关[①].

同样地, 令 x 与 z 固定, 而 y 变动, 也可以考虑极限值

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}.$$

这极限称为函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处对于 y 的偏导数, 并可记为:

$$\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y};\quad u'_y,\quad f'_y(x_0,y_0,z_0);\quad D_y u,\quad D_y f(x_0,y_0,z_0).$$

函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处对于 z 的偏导数也可以同样地定义.

偏导数的计算方法在实质上较之计算通常的导数并没有什么新的东西.

例 1) 令 $u=x^y(x>0)$; 这函数的偏导数是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

第一个偏导数是作为 x 的幂函数 ($y=$ 常数) 算出来的, 而第二个是作为 y 的指数函数 ($x=$ 常数) 算出来的.

2) 若 $u=\arctan\dfrac{x}{y}$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

3) 对于 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

注意, 偏导数最常用的符号 (弯曲的 ∂) 只能看作整个记号, 而不能看作商或分数.

139. 函数的全增量 若由自变量之值 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 开始, 并各给以增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 则函数 $u=f(x,y,z)$ 也会得一增量

$$\begin{aligned}\Delta u&=\Delta f(x_0,y_0,z_0)\\&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0),\end{aligned}$$

称为函数之全增量.

[①]这里, 整个记号

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad f'_x,\quad D_x f$$

可看作对 x 的偏导数的函数记号. 以下再不作这一类说明了.

在一元函数 $y=f(x)$ 情况, 设在 x_0 点有限导数 $f'(x_0)$ 存在, 则对于函数的增量应有以下的公式 [第 **82** 段, (2)]:

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

其中 α 依赖于 Δx, 而当 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$.

我们现在对多元函数 $u=f(x,y,z)$ 的增量得出类似之式:

$$\begin{aligned}\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)&=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y\\&\quad+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y+\gamma\cdot\Delta z,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 α,β,γ 依赖于 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 并与之同时趋向于 0. 然而这里须对函数加以更强的限制.

1°. *若偏导数 $f'_x(x,y,z),f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 不但存在于 (x_0,y_0,z_0) 处, 而且也存在于其某一邻域中, 此外, 它们又在此点对 x,y,z 连续,则式 (1) 成立.*

为证此式, 可将函数增量 Δu 写为

$$\begin{aligned}\Delta u=&[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)]\\&+[f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)]\\&+[f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)].\end{aligned}$$

这三个差中的每一个都是对一个变元的偏增量. 因为已设偏导数存在于 (x_0,y_0,z_0) 之邻域中, 故 —— 当 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 充分小时 —— 对这些差分别可用有限增量公式 [第 **102** 段][①]; 即得:

$$\begin{aligned}\Delta u=&f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x\\&+f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y\\&+f'_z(x_0,y_0,z_0+\theta_2\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

若再令

$$\begin{aligned}&f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)=f'_x(x_0,y_0,z_0)+\alpha,\\&f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y,z_0+\Delta z)=f'_y(x_0,y_0,z_0)+\beta,\\&f'_z(x_0,y_0,z_0+\theta_2\Delta z)=f'_z(x_0,y_0,z_0)+\gamma,\end{aligned}$$

于是即得 Δu 的表达式 (1). 当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0,\Delta z\to 0$ 时, 上式左方的导数的变元趋向于 x_0,y_0,z_0 (因 θ,θ_1,θ_2 都是真分数), 故由偏导数在该点连续之假设, 即知左方趋向于式右之偏导数,而量 α,β,γ 趋向 0. 证明完毕.

①若考虑第一个差, 则可把它看作单变量 x 的函数 $f(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 由 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 的增量, 这函数对 x 的导数, 即 $f'_x(x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ 由假定对于区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 中的所有 x 存在, 故有限增量公式可以应用.

由上面已证的定理还可得出:

2°. *由偏导数在一点邻域中之存在与在该点之连续性, 可以推出函数在该点之连续性.*

事实上, 当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ 时显然有 $\Delta u \to 0$.

为了把 (1) 写得更紧缩些, 我们引入以下的记号:

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

即点 (x_0, y_0, z_0) 与 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 间的距离.

由此即有

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho} + \gamma\frac{\Delta z}{\rho}\right)\rho.$$

将括号中式子记为 ε, 则有

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = \varepsilon\rho,$$

其中 ε 依赖于 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 并当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$, 或简言之, 即当 $\rho \to 0$ 时亦趋向 0. 故公式 (1) 又可写为:

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon \cdot \rho, \quad (2)$$

而当 $\rho \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$. $\varepsilon \cdot \rho$ 这量显然可写为 $o(\rho)$ (只要把 **54** 段中记号推广到多元函数即可).

注意, 在以上讨论中, 我们并未排除增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 中有个别或全体同时为 0 的情况, 于是在说到, 当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ 时有

$$\alpha \to 0, \quad \beta \to 0, \quad \gamma \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

其含义是要在较广泛的意义上去理解的, 即不排除这些增量在其变动过程中取零值的可能性 (参看第 **82** 段类似的附注).

在证明以上定理时, 我们对于多元函数所作的要求比对于一元函数的要较多一些. 为了指出当不具有这些条件时, 公式 (1) 与 (2) 可能不成立, 让我们最后来考察下面的例子 (为简单起见, 只设有两个自变量).

今定义函数为

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{若 } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

这函数在全平面上连续; 在点 $(0, 0)$ 处的连续性, 可由第 **130** 段, 4) 看出. 其次, 对 x 与对 y 的偏导数在全平面上皆存在: 当 $x^2 + y^2 > 0$ 时显然有

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在原点则有 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$; 这可由偏导数的定义及 $f(x,0) = f(0,y) = 0$ 直接得出. 容易看出, 在 $(0,0)$ 点偏导数的连续性被破坏 (例如, 对于第一个只要令 $y = x = \dfrac{1}{n} \to 0$ 即可证明).

公式 (1) 与 (2) 对此函数在 $(0,0)$ 点不成立. 实际上, 设若不然, 则有

$$\Delta f(0,0) = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

这里当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时有 $\varepsilon \to 0$. 特别取 $\Delta y = \Delta x > 0$, 应有

$$\frac{1}{2}\Delta x = \varepsilon\sqrt{2} \cdot \Delta x, \quad 即 \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

故当 $\Delta x \to 0$ 时 ε 不趋向 0, 而与假设矛盾.

140. 复合函数的导数 作为公式 (1) 的应用, 我们来研究复合函数的微分问题. 设有定义于区域 $\mathscr{D}$ 中之函数

$$u = f(x, y, z),$$

而且其每一个变元 x, y, z 又是另一变元 t 在某区间上的函数:

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

除此之外, 设当 t 变动时, 点 (x, y, z) 不超出 $\mathscr{D}$ 的范围.

以 x, y, z 的值代入 u 即得复合函数

$$u = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)).$$

设 u 对 x, y, z 具有连续偏导数 u'_x, u'_y, u'_z 而 x'_t, y'_t, z'_t 亦存在. 于是可以证明复合函数的导数亦存在, 并可以把它算出来.

实际上, 设给 t 以增量 Δt, 则 x, y, z 各得相应的增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 而 u 亦得增量 Δu.

将 u 的增量以公式 (1) 表出 (这是可以的, 因为已假设了偏导数 u'_x, u'_y 与 u'_z 的连续性), 即得

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

这里当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ 时 $\alpha \to 0, \beta \to 0, \gamma \to 0$. 将此式双方除以 Δt, 得

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

现令 $\Delta t \to 0$, 于是 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 皆趋向 0, 因为函数 x, y, z 对 t 是连续的 (已设了导数 x'_t, y'_t, z'_t 存在), 故 α, β 与 γ 亦趋向于 0. 求极限即得

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t. \tag{3}$$

可见, 在以上假设下复合函数的导数确是存在的. 若用微分记号, 则 (3) 可写为:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

现在考虑 x,y,z 不只依赖于一个变量 t, 而是依赖于几个变量之情况; 例如

$$x=\varphi(t,v),\quad y=\psi(t,v),\quad z=\chi(x,v).$$

除了假设 $f(x,y,z)$ 的偏导数存在与连续外, 这里还假设 x,y,z 对 t 与 v 的偏导数存在.

在将 φ,ψ,χ 这些函数代入 f 后, 即得两个变量 t 与 v 的函数, 因而发生了有关偏导数 u'_t,u'_v 的存在与计算的问题. 但这个情况本质上与已经研究过的并无不同, 因为在求二元函数偏导数时, 我们是要固定其中一个变量的, 于是函数也就成为一元函数了. 因此公式 (3) 仍可适用, 而公式 (4) 则须改写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{4a}$$

141. 例 1) 考虑幂指函数

$$u=x^y.$$

设 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 并按以上公式微分, 即得已知的莱布尼茨与约翰 · 伯努利公式

$$u'_t=y\cdot x^{y-1}\cdot x'_t+x^y\cdot\ln x\cdot y'_t.$$

这一公式在前面我们曾以不同的符号用一种技巧的方法得出过 [第 **35** 段, (5)].

公式 (3) 与一元函数的公式 $u'_t=u'_x\cdot x'_t$ 相似. 然而要着重指出, 导出这些公式的条件是不同的. 若 u 只依赖于一个变量, 则只需设 u'_x 存在, 而在多个变量时还要设偏导数 $u'_x,u'_y,\cdots$ 连续. 下面的例子指出, 只设偏导数存在对于 (3) 的成立是不够的.

2) 今定义函数 $u=f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\quad(\text{当 } x^2+y^2>0\text{时}),\quad f(0,0)=0.$$

我们已看到, 这函数在一切点包括原点都有偏导数, 而且

$$f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0;$$

然而, 正是在这点上偏导数有间断.

若引用新变量 t 而设 $x=y=t$, 即得 t 的复合函数. 由式 (3) 这函数的导数当 $t=0$ 时应当为

$$u'_t=u'_x\cdot x'_t+u'_y\cdot y'_t=0.$$

但另一方面, 若将 x,y 的值真正代入 $u=f(x,y)$, 并设 $t\neq 0$, 应有

$$u=\frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}\cdot t,$$

当 $t=0$ 时此式亦成立.

现在直接对 t 微分, 则知在 t 的一切值包括 $t=0$ 在内 $u'_t=\frac{1}{2}$.

说明了式 (3) 在这时不可使用.

3) 由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可定义 y 为 x 的函数:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a<x<a),$$

其导数为

$$y'_x=\mp\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

今不对 y 解出此方程而求这导数.

解 设想将方程中的 y 已经用上面所提到的函数来代入, 则它应恒满足方程. 对 x 微分这恒等式 (用复合函数的微分法则), 即得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'_x=0,$$

如前一样, 有

$$y'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

4) 在一般情况下, 设有未对 y 解出的方程

$$F(x,y)=0$$

(F 及其偏导数皆连续). 在一定条件下 (见第二卷第二十章) 可以断言, 由此方程可定义 y 为 x 的函数, 而且导数存在 (虽然这一函数的解析表达式可能不知道!). 在这类情况, y 称为 x 的隐函数. 求隐函数的导数.

解 正如在上面的特例中一样, 设想已将 y 用这个隐函数来代入. 对 x 微分这恒等式, 即得:

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'_x=0,$$

于是 (自然要设 $F'_y\neq 0$) 有

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

142. 全微分 对于一元函数 $y=f(x)$ 的情况, 我们已在第 **89** 段中考虑过将其增量 $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表为

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(A=\text{常数})\tag{5}$$

的问题. 并且我们证明了 [第 **90** 段] 可以有这种表示法的充要条件是在 x_0 点有有限导数 $f'(x_0)$ 存在, 而且恰好当 $A=f'(x_0)$ 时, 上述的等式成立. 函数增量的线性部分

$$A\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$$

就称为函数的微分 dy.

现在推广到多元函数, 例如对于定义在某 (例如, 是开的) 区域 $\mathscr{D}$ 上的三元函数 $f(x,y,z)$, 自然可提出类似的问题, 即将增量

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta f(x_0,y_0,z_0)\\ &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)\end{aligned}$$

表为

$$\Delta f(x_0,y_0,z_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z + o(\rho), \tag{6}$$

其中 A,B,C 是常数, 而 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

正如在 **90** 段一样, 容易证明, 若 (6) 成立, 则函数在 (x_0,y_0,z_0) 点对各个元的偏导数必存在, 而且

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=A,\quad f'_y(x_0,y_0,z_0)=B,\quad f'_z(x_0,y_0,z_0)=C.$$

事实上, 例如, 只要令 (6) 中 $\Delta y=\Delta z=0$ 而 $\Delta x\neq 0$, 即得 [与第 **90** 段 (1a) 比较]:

$$\begin{aligned}\Delta_x f(x_0,y_0,z_0) &= f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)\\ &= A\cdot\Delta x + 0(|\Delta x|),\end{aligned}$$

故知存在着

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=A.$$

因此关系式 (6) 只可能取以下形式

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0,z_0) = f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta y\\ +f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta z + o(\rho),\end{aligned} \tag{7}$$

或简写为

$$\Delta u = u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z + o(\rho). \tag{7a}$$

虽然, 在一元函数的情况, 只要在该点 $y'_x=f'(x_0)$ 存在, 即可保证式 (5) 成立, 但在现在情况, 只知偏导数

$$u'_x=f'_x(x_0,y_0,z_0),\quad u'_y=f'_y(x_0,y_0,z_0),\quad u'_z=f'_z(x_0,y_0,z_0)$$

存在, 却不能保证展开式 (6) 成立了. 对于二元函数, 这一点已在第 **139** 段的例子中看到过. 那里还指出了式 (6) 成立的充分条件: 即偏导数在 (x_0,y_0,z_0) 的邻域中存在, 且在该点连续.

当式 (7) 成立时, 称函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微分. 而 (只在这时!) 称函数增量的线性部分

$$\begin{aligned} & u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z \\ = \ & f'_x(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta z \end{aligned}$$

为 (全) 微分, 并记之为 du 或 $df(x_0,y_0,z_0)$.

在多元函数时 "函数在一点可微分" 这一断言, 我们知道, 并不相当于在该点 "函数对一切元的偏导数存在" 这一断言, 其含义要更多一些. 然而通常我们假设偏导数的存在与连续性, 也就包含了可微分性了.

所谓自变量的微分 dx, dy, dz, 约定即是任意增量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$[①]; 故可写作

$$\begin{aligned} & df(x_0,y_0,z_0) \\ = \ & f'_x(x_0,y_0,z_0)dx + f'_y(x_0,y_0,z_0)dy + f'_z(x_0,y_0,z_0)dz \end{aligned}$$

或

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

143. 一阶微分形式的不变性 设函数 $u = f(x,y,z)$ 具有连续偏导数 u'_x, u'_y, u'_z, 而 x, y, z 又是自变量 t 与 v 的函数:

$$x = \varphi(t,v), \quad y = \psi(t,v), \quad z = \chi(t,v),$$

而且亦有连续偏导数 $x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v$. 于是 [第 **140** 段] 复合函数 u 对于 t 及 v 的导数不但存在, 而且连续, 这由 (3) 易见.

若 x, y, z 是自变量, 则 u 的全微分应该是

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

但现在 u —— 通过 x, y, z —— 依赖于变量 t 与 v. 因此, 对这两个变量微分可写为:

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

但由 (3) 有

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

而类似地亦有

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

---

①若规定自变量 x 的微分即是视 x 为自变量 x, y, z 的函数的微分, 则由一般公式有

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x;$$

而等式 $dx = \Delta x$ 就已得证.

代入 du 的表达式就有:

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t)dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v)dv.$$

集项如下:

$$\begin{aligned} du = & u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) \\ & + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv). \end{aligned}$$

不难看到: 括号中之式正是 (t 与 v 的) 函数 x, y, z 的微分, 故有

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

我们所得的微分形式与 x, y, z 是自变量时的微分形式一样 (但是 dx, dy, dz 这些符号, 在这里自然是另一种意义).

因此, 对于多元函数, 正如对于一元函数一样, 仍有一阶微分形式的不变性①.

可能 x, y, z 依赖于不同变量

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(v, w).$$

这时可以认为

$$x = \varphi_1(t, v, w), \quad y = \psi_1(t, v, w), \quad z = \chi_1(t, v, w),$$

而以上的讨论仍可适用.

推论 当 x 与 y 是一元函数时, 有以下的公式:

$$d(cx) = c \cdot dx, \quad d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(xy) = x \cdot dy + y \cdot dx,$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

这些公式当 x, y 是任意多元的函数

$$x = \varphi(t, v, \cdots), \quad y = \psi(t, v, \cdots)$$

时仍成立.

我们来证明最后一个为例.

为此先设 x 与 y 是自变量, 而

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \cdot dx - \frac{x}{y^2} \cdot dy = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

我们看见, 这时微分形状与一元函数的相同. 由一阶微分形式的不变性, 即可断定这个式子当 x, y 是任意多元函数时仍成立.

---

①注意, 只要假定一切所考察的函数都是可微分的, 则以上结论仍成立. 为此只需证明可微分函数叠置后仍为可微分函数.

上面证得的全微分的性质与推论可用以化简微分之计算, 如

$$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2}.$$

因为自变量微分的系数正是相应的偏导数, 故由此立刻可得后者. 例如, 对于 $u=\arctan\dfrac{x}{y}$ 立即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

[比较第 **138** 段, 2)].

144. 全微分在近似计算中的应用 正与一元函数微分相似 [第 **94** 段], 多元函数的全微分也可以有效地应用于近似计算中误差估计. 设有函数 $u=f(x,y)$, 而在确定 x,y 的值时发生了误差, 设为 Δx 与 Δy. 于是按变元不正确的值算出来的 u 值也有误差 $\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$, 若已知 Δx 及 Δy 的误差估计, 要估计 Δu 这一误差.

近似地将函数增量代以其微分 (这只在 $\Delta x,\Delta y$ 充分小时才是合理的) 即得

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y. \tag{8}$$

这时误差 $\Delta x,\Delta y$ 及其系数都是可正可负. 把它们都换成绝对值, 即得不等式

$$|\Delta u|\leqslant\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

若用 $\delta x,\delta y,\delta u$ 表示最大绝对误差 (或绝对误差的界限), 则显然有

$$\delta u=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\delta y. \tag{9}$$

下面是几个例子 .

1) 首先, 用以上的公式容易建立起平常近似计算的法则. 令 $u=xy$ (其中 $x>0,y>0$), 故 $du=ydx+xdy$; 把微分代以增量, 即得 $\Delta u=y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y$ [见 (8)], 或关于误差界限 [见 (9)] 有:

$$\delta u=y\cdot\delta x+x\cdot\delta y.$$

双方除以等式 $u=xy$, 最后即得

$$\frac{\delta u}{u}=\frac{\delta x}{x}+\frac{\delta y}{y}, \tag{10}$$

它表明这样一个法则: 积的 (最大) 相对误差等于各因子 (最大) 相对误差之和.

也可以做得更简单些. 先取 $u=xy$ 的对数, 然后再取微分:

$$\ln u=\ln x+\ln y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\text{①} \text{ 等等.}$$

①请读者注意, 在计算 $\ln u$ 的微分时, 是把 u 看作自变量来作的, 虽然事实上 u 是 x 与 y 的函数. 在以下也要注意到这一点.

若 $u=\dfrac{x}{y}$, 由这个方法可得

$$\ln u=\ln x-\ln y,\quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y};$$

取绝对值与最大误差, 又得到 (10). 因此, 商的 (最大) 相对误差等于除式与被除式 (最大) 相对误差之和.

2) 误差计算在地形测量上时常要用到, 主要用在由三角地形的已测到的元素计算不能直接测到的元素上. 下面是这方面的一个例子.

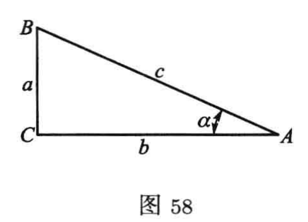


图 58

设在直角三角形 ABC (图 58) 中, 底边 $AC=b$ 与邻角 $BAC=\alpha$ 已经测得; 第二个邻边 a 可用公式 $a=b\cdot\tan\alpha$ 算出. 在测量 b 与 α 时的误差怎样反映在 a 的值上?

取对数并微分即得

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b}+\frac{d\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha},\quad 故\quad da=\tan\alpha\cdot db+\frac{b}{\cos^2\alpha}d\alpha,$$

故

$$\delta a=\tan\alpha\cdot\delta b+\frac{b}{\cos^2\alpha}\cdot\delta\alpha.$$

145. 齐次函数 我们知道, 齐次多项式是由次数相同的项组成的多项式. 例如, 表达式

$$3x^2-2xy+5y^2$$

就是二次齐次多项式. 若将 x 与 y 都乘以一个因子 t, 则整个多项式就得到一个 t 的二次方因子. 任意的齐次多项式都有类似性质.

然而, 有些较复杂的函数也有这样的性质; 例如, 若取

$$x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y},$$

则当将两个元 x,y 各乘以 t 时, 整个函数得到一个 t^2 的因子, 而与二次齐次多项式相仿. 这一类函数自然可称为二次齐次函数.

现在给出一般的定义:

定义于区域 $\mathscr{D}$ 上的 m 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为 k 次**齐次函数**, 只要当把各变元都乘以 t 时整个函数得到 t 的 k 幂因子, 即只要成立着等式

$$f(tx_1,\cdots,tx_m)=t^k\cdot f(x_1,\cdots,x_m).\tag{11}$$

为简单起见我们限于考虑 $x_1,\cdots,x_m$ 与 t 都只取正值的情况. 对于函数 f 的定义区域 $\mathscr{D}$, 我们假设它有性质: 若 $\mathscr{D}$ 包含一点 $M(x_1,\cdots,x_m)$, 则它也要包含一切点 $M_t(tx_1,\cdots,tx_m)$, 这里 $t>0$, 即包含由原点出发而经过 M 点的完整的半射线.

齐次函数的次数 k 可以是任一实数; 例如, 函数

$$x^{\pi} \cdot \sin \frac{y}{x} + y^{\pi} \cdot \cos \frac{y}{x}$$

就是变元 x 和 y 的 π 次齐次函数.

现在来求 k 次齐次函数的一般表达式.

先设 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 是零次齐次函数; 于是

$$f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_m).$$

令 $t = \frac{1}{x_1}$, 即得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

若引入 $m-1$ 个元的函数

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}) = f(1, u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}),$$

即有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

因此, 所有的零次齐次函数都可以写成各变元与某一变元之比的函数. 反之, 也很显然, 上式就给出了零次齐次函数的一般表达式.

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 是 k 次齐次函数, 则它与 x_1^k 之比是零次齐次函数, 由上面证得的结果有

$$\frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{x_1^k} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right),$$

于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = x_1^k \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_m}{x_1}\right).$$

反之, 若函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 满足上式, 则又很容易验证它是 k 次齐次函数. 于是, 我们就得到了 k 次齐次函数的一般表达式.

例

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y} \cdot \ln \frac{x}{y} = x^2 \frac{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1}}{\frac{y}{x} - 1} \cdot \ln \frac{y}{x}.$$

现在设 (k 次) 齐次函数 $f(x, y, z)$①在 (开) 区域 $\mathscr{D}$ 中对各个元都有连续的偏导数. 任意固定 $\mathscr{D}$ 中一点 (x_0, y_0, z_0) 则由基本恒等式 (11) 知, 对任意 $t > 0$ 皆有:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^k \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

① 只是为了书写简单才限于三个变量的情况.

现将此式对 t 微分; 式左视为 t 的复合函数①, 而式右则为 t 的幂函数. 于是即有:

$$f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot y_0+f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot z_0=k\cdot t^{k-1}\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

若设 $t=1$ 即有下式:

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=k\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

于是, 对于任意点 (x,y,z) 皆有

$$f'_x(x,y,z)\cdot x+f'_y(x,y,z)\cdot y+f'_z(x,y,z)\cdot z=k\cdot f(x,y,z). \tag{12}$$

这等式称为*欧拉等式*.

我们已看到, 任一具有连续偏导数的 k 次齐次函数都满足这等式. 也可以证明逆定理, 即任一连续、具有连续偏导数而且满足欧拉等式 (12) 的函数一定是 k 次齐次函数.

附注 欧拉在他的《微分学》一书里只考虑过特殊类型的齐次表达式 —— 有整式、分式、根式及其结合而未给出一般定义. 但在引出以他命名的公式时, 他所依据的性质正是现在作为齐次函数定义之基础的性质.

§2. 高阶导数与高阶微分

146. 高阶导数 若函数 $u=f(x,y,z)$②在某一个 (开) 区域 $\mathscr{D}$ 上有对于其中一个变元的偏导数, 则此偏导数本身仍是 x,y,z 的函数, 它可能在某一点 (x_0,y_0,z_0) 仍有对于同一变元或另一变元的偏导数. 这些后来得到的偏导数称为原来的函数 $u=f(x,y,z)$ 的*二阶偏导数* (或*第二次偏导数*).

例如, 若一阶导数是对 x 取的, 则它对 x,y,z 的导数便记为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial z}$$

或

$$u''_{x^2}=f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0),\quad u''_{xy}=f''_{xy}(x_0,y_0,z_0),$$

$$u''_{xz}=f''_{xz}(x_0,y_0,z_0)^{③}.$$

①正是为了可以应用复合函数微分法则, 才设偏导数的连续性 [第 **140** 段].

②在此为书写简单计只限于三元函数.

③当然, 微分记号应该看作整个符号. 分母中的平方 ∂x^2 约定代替 $\partial x\partial x$, 表示对于 x 微分两次. 同样, x^2 也可写作 xx. 在 u 的右下角的符号 x^2 代替 xx, 意义也相同. 下文都照这样去理解.

类似地可以去定义三阶、四阶导数等等 (第三次、第四次导数). n 阶偏导数的一般定义也可以归纳地给出.

注意, 对于不同变元而取的高阶偏导数也称混合偏导数, 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z^2},\cdots.$$

例 1) 设 $u = x^4y^3z^2$, 则

$$\begin{aligned}
&u'_x = 4x^3y^3z^2,\quad u''_{xy} = 12x^3y^2z^2,\quad u'''_{xyz} = 24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2y^2z,\\
&u'_y = 3x^4y^2z^2,\quad u''_{yx} = 12x^3y^2z^2,\quad u'''_{yxx} = 36x^2y^2z^2,\quad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2y^2z,\\
&u'_z = 2x^4y^3z,\quad u''_{zx} = 8x^3y^3z,\quad u'''_{zxy} = 24x^3y^2z,\quad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2y^2z.
\end{aligned}$$

2) 我们已知 [第 **138** 段, 2)] $u = \arctan\dfrac{x}{y}$ 的偏导数是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

现在算出其以后的导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},
\end{aligned}$$

等等.

147. 关于混合导数的定理 在考察例 1) 与例 2) 的时候, 一眼就可看到, 关于同样的诸变量但依不同次序而取的混合导数是相等的.

但立刻就应该指出, 这一性质绝不能就由混合导数的定义必然导出, 因为也会有依不同次序而取的混合导数是不相等的情况.

例如, 考察函数

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2>0\ 时),\quad f(0,0)=0.$$

我们有:

$$\begin{aligned}
&f'_x(x,y) = y\cdot\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\quad (x^2+y^2>0\ 时),\\
&f'_x(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

若给 x 以等于零的特殊值, 则对任意 y 值 (包括 $y=0$ 在内) 就有: $f'_x(0,y)=-y$. 将这一函数对 y 微分, 得 $f''_{xy}(0,y)=-1$, 由此推得, 特别在 $(0,0)$ 点处有

$$f''_{xy}(0,0)=-1.$$

用同样的方法计算在点 $(0,0)$ 处 f''_{yx}, 即得

$$f''_{yx}(0,0)=1.$$

于是, 对于所考察的函数, 有 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

然而, 在前述例子中所看到的仅微分次序不同的诸混合导数相等的事实也并不是偶然的: 在很广泛一类情况下都会成立.

定理 设 1) 函数 $f(x,y)$ 定义在 (开) 区域 $\mathscr{D}$ 上, 2) 在此区域上存在着一阶导数 f'_x 及 f'_y 以及二阶混合导数 f''_{xy} 与 f''_{yx}, 最后, 3) 这些二阶导数 f''_{xy} 与 f''_{yx}, 作为 x 与 y 的函数, 在 $\mathscr{D}$ 中某点 (x_0,y_0) **连续**. 于是在此点有:

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{1}$$

证明 考虑表达式

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk},$$

其中 h,k 不为 0, 例如为正数, 而且充分小, 使得矩形 $[x_0,x_0+h;y_0,y_0+k]$ 全在 $\mathscr{D}$ 中; 一直到讨论结束我们就这样来规定着 h 与 k.

现在引进一个 x 的辅助函数:

$$\varphi(x)=\frac{f(x,y_0+k)-f(x,y_0)}{k},$$

由假设 2), 它在区间 $[x_0,x_0+h]$ 中有导数

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)}{k},$$

从而 $\varphi(x)$ 是连续函数. 借助于这个函数, 可将 W 的表达式

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k}-\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right]$$

改写为

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}.$$

因为 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+h]$ 中满足拉格朗日定理 [第 **102** 段] 的一切条件, 因此, 可用有限增量公式将 W 改写成:

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)}{k}\quad(0<\theta<1).$$

利用二阶导数 $f''_{xy}(x,y)$ 的存在性, 就可在区间 $[y_0, y_0+k]$ 上对于 y 的函数 $f'_x(x_0+\theta h, y)$ 再用一次有限增量公式, 最后得

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) \quad (0<\theta,\theta_1<1). \tag{2}$$

但 W 的表达式中一方面含 x 与 h, 另一方面又以同样方式含 y 与 k. 因此, 若将它们互相调换, 并引入辅助函数

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h},$$

用同样方法去论证, 得出结果:

$$W = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k) \quad (0<\theta_2,\theta_3<1). \tag{3}$$

比较 (2) 与 (3) 即知

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_3 k).$$

现令 h 与 k 趋向于 0, 而取极限. 由于因子 $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的有界性, 故上式左右两边的变元都相应地趋向于 x_0, y_0. 于是由 3) 最后得:

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0),$$

故证讫.

于是, **连续的**混合导数 f''_{xy} 与 f''_{yx} 恒相等.

在上举的例子中, 这些混合导数

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \quad (x^2+y^2>0)$$

当 $x\to 0, y\to 0$ 时根本没有极限, 因此, 在点 $(0,0)$ 发生间断: 这时我们的定理自然不能应用.

附注 早在欧拉与克莱罗① (1740 年) 就注意到混合导数之相等, 并试图去证明过. 然而第一个严格证明是直到 1873 年才由施瓦茨②给出的.

我们要注意两次微分的交换次序问题与第 **131** 段里讲的两次取极限的交换次序这个普遍问题间的联系.

还有下面有关混合导数的一般定理:

定理 设 m 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 定义在一个 m 维开区域 $\mathscr{D}$ 上, 且在域中具有至 $(n-1)$ 阶为止的一切可能的偏导数以及 n 阶**混合**导数, 而且所有这些导数都在 $\mathscr{D}$ 中**连续**.

在这些条件下, 任一 n 阶混合导数的值就与取微分的次序无关.

①阿历克西斯 · 克洛德 · 克莱罗 (1713—1765) 是卓越的法国数学家.

②卡尔 · 赫尔曼 · 阿瓦曼杜阿 · 施瓦茨 (1843—1921) 是德国数学家.

我们不再去讲这个证明了, 它可以根据前面定理导出.

我们在以后恒假设导数有连续性, 那么微分的次序就无关紧要了. 在使用混合导数时我们常把对同一变元的各次微分集合在一起.

148. 高阶微分 设在区域 $\mathscr{D}$ 中给出某个具有一阶连续偏导数的函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$. 于是我们知道, 其 (全) 微分 du 就是以下表达式:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m,$$

其中 $dx_1, \cdots, dx_m$ 是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的任意增量.

我们看到, du 仍是 $x_1, \cdots, x_m$ 的一个函数. 若设 u 的连续二阶偏导数存在, 则 du 就有连续一阶偏导数, 于是才能够谈到这个微分 du 的全微分 $d(du)$, 它称为 u 之二阶微分(或第二次微分); 用记号 d^2u 表示.

要着重指出, 增量 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ 在这里要看作常数, 而且由一次微分转移到下一次微分时, 都保持着同一数值 (故二阶微分 $d^2x_1, \cdots, d^2x_m$ 都是零!).

于是, 若应用第 **143** 段中已知的微分法则, 就有:

$$\begin{aligned} d^2u = d(du) &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m\right) \\ &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m. \end{aligned}$$

展开后即有:

$$\begin{aligned} d^2u = &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_1 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_2 + \cdots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m\right)\cdot dx_m \\ = &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m^2 \\ &+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3 + \cdots \\ &+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}dx_2dx_3 + \cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}dx_m. \end{aligned}$$

同样地可以定义三阶微分 d^3u, 等等. 一般地, 若 $(n-1)$ 阶微分 $d^{n-1}u$ 已经定义, 则 n 阶微分 d^nu 就定义为 $(n-1)$ 阶微分的 (全) 微分:

$$d^nu = d(d^{n-1}u).$$

若函数 u 有直至 n 阶为止的所有各阶的连续偏导数, 则 n 阶微分的存在就有了保证. 但是各阶微分的展开式却是越来越复杂. 为了简化其记法, 我们用下面的方法.

首先, 对于一阶微分的表达式, 我们约定 "可把 u 提出括号之外", 于是它就可以符号地写作

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right) \cdot u.$$

现在我们注意, 若在二阶微分表达式中也 "把 u 提出括号之外", 则剩在括号里的形式上正是

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m$$

的平方展开式; 因此二阶微分可以符号地写作

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 \cdot u.$$

同样地可以写出三阶微分等等. 一般的法则是: 对于一切的 n 都有符号等式

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n \cdot u, \tag{4}$$

上式应作如此理解: 首先, 把括号里的 "多项式" 按代数学的乘幂法则形式地展开, 然后把所得各项 "乘" 以 u (填写在分子 ∂^n 之后), 只在这以后, 一切记号才回复到导数与微分的意义.

法则 (4) 可以用数学归纳法来证明.

于是, n 阶微分是 n 次齐次完全多项式, 或常称为对于自变量微分的 n 次型, 其系数是 n 阶偏导数乘一个为整数的常数 ("多项式" 公式中的系数).

例如, 若 $u = f(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}
d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,\\
d^3u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3,\\
d^4u &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}dxdy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4,
\end{aligned}$$

等等. 具体地设 $u = \arctan\frac{x}{y}$, 即有

$$\begin{aligned}
du &= \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}, \quad d^2u = \frac{2xy(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)dxdy}{(x^2+y^2)^2},\\
d^3u &= \frac{(6x^2y-2y^3)dx^3+(18xy^2-6x^3)dx^2dy}{(x^2+y^2)^3}\\
&\quad+\frac{(6y^3-18x^2y)dxdy^2+(2x^3-6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3},
\end{aligned}$$

等等.

149. 复合函数的微分 设现在有复合函数:

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_m),$$

其中

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \cdots, t_k) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

在这种情形一阶微分仍可保持原来的形式:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

(根据一阶微分形式的不变性, 第 **143** 段). 但是这里 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ 已不再是自变量的微分, 而是函数的微分, 因此, 本身就可能都是函数, 而不是像前面那样的常数了.

现在来算这函数的二阶微分, (应用第 **143** 段的微分法则) 有:

$$\begin{aligned} d^2u &= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \cdot dx_m \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d(dx_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d(dx_2) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d(dx_m) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \cdot u \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot d^2x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot d^2x_m. \end{aligned}$$

我们看见, 对于高于一阶的微分, 形式的不变性一般并不再成立.

现在来看一个特例, 即 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的线性函数的情形, 即

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \alpha_i^{(2)} t_2 + \cdots + \alpha_i^{(k)} t_k + \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

其中 $\alpha_i^{(j)}$ 和 β_i 都是常数.

这时, 有

$$dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \cdots + \alpha_i^{(k)} dt_k = \alpha_i^{(1)} \Delta t_1 + \cdots + \alpha_i^{(k)} \Delta t_k.$$

我们看到, 函数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一切一阶微分在现在这种情况仍是常数, 而与 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 无关; 所以第 **148** 段中的算式可以不加改动而应用. 由此可知, 在将自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 换为新变量 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的线性函数之后, 即使对高阶微分仍可保持原来的形式. 在其中微分 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_m$ 虽与增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m$ 相同, 但后者不是任意的, 而是由增量 $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_k$ 决定的.

这个简单而重要的附注是柯西作出的, 我们在下一段立刻就要用到它.

150. 泰勒公式 我们已知 [第 **107** 段, (12b)], 若函数 $F(t)$ 的前 $n+1$ 阶导数存在, 则按泰勒公式, 它可展开为下面的形式:

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)\\+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\Delta t)\quad(0<\theta<1).$$

这里要着重指出, 参与右边微分式中各个不同幂次中的数量 dt 确实等于增量 Δt, 而 Δt 参与在左边的函数增量中:

$$\Delta F(t_0)=F(t_0+\Delta t)-F(t_0).$$

最后形式的泰勒公式便被推广到多元函数的情况 (柯西).

为书写简单, 我们限于二元函数 $f(x,y)$ 的情况.

设在某定点 (x_0,y_0) 的邻域中这函数具有一切的直到 $(n+1)$ 阶为止的连续导数. 给 x_0,y_0 以某增量 $\Delta x,\Delta y$, 而使联结 (x_0,y_0) 点与 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 点的直线段不越出点 (x_0,y_0) 的前述邻域之外.

现在要证明关于 $f(x,y)$ 在上述的假定下, 以下等式是正确的:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0)&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\\&\quad(0<\theta<1),\end{aligned}\tag{5}$$

而且在等式右方各阶微分中的 dx 与 dy 正好等于等式左方产生函数增量的自变量增量 Δx 与 Δy.

为了证明, 引入新的自变量 t, 并设

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\quad y=y_0+t\cdot\Delta y\quad(0\leqslant t\leqslant 1),\tag{6}$$

将 x 与 y 的值代入 $f(x,y)$, 得单变量 t 的复合函数:

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x,y_0+t\cdot\Delta y).$$

我们知道, 被引入的公式 (6) 在几何上就表示联结点 $M_0(x_0,y_0)$ 与点 $M_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 的直线段.

显然, 我们可以考虑辅助函数的增量

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)$$

以代替增量

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

因为二者相等. 但 $F(t)$ 是一元函数且有 $(n+1)$ 阶连续导数; 因此对它可用上述泰勒公式而得:

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta)\quad(0<\theta<1),\tag{7}$$

这里出现在右方各幂次中的微分 dt 就等于 $\Delta t=1-0=1$.

现在应用, 在变元线性变换下, 高阶微分的形式也不变之理, 就有

$$dF(0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot dx+f'_y(x_0,y_0)\cdot dy=df(x_0,y_0),$$
$$d^2F(0)=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot dx^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot dxdy$$
$$+f''_{yy}(x_0,y_0)\cdot dy^2=d^2f(x_0,y_0),$$

等等. 最后, 对于 $(n+1)$ 阶微分有:

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y).$$

重要的是要注意, 这里微分 dx,dy 与前面取的增量 $\Delta x,\Delta y$ 毫无差别. 实际上, 当 $dt=1$ 时有

$$dx=\Delta x\cdot dt=\Delta x,\quad dy=\Delta y\cdot dt=\Delta y.$$

把这些都代入展开式 (7), 即得要证的展开式 (5).

读者应该弄清楚, 多元函数泰勒公式的微分形式虽然和一元函数的同样简单, 但其展开后的形式要复杂很多.

§3. 极值、最大值与最小值

151. 多元函数的极值 · 必要条件 设函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

定义于区域 $\mathscr{D}$ 中, 而 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 是这区域的一个内点.

若对于点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 能有这样的一个邻域

$$(x_1^0-\delta_1,x_1^0+\delta_1;x_2^0-\delta_2,x_2^0+\delta_2;\cdots;x_m^0-\delta_m,x_m^0+\delta_m)$$

存在, 使在域中一切点上都成立不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)\ \underset{(\geqslant)}{\leqslant}\ f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0),$$

则说此函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 在该点有**一极大值** (**极小值**).

若此邻域可取得充分小, 以致使上式中的等号可以取消, 即在域中每点除去点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 本身外, 都成立严格不等式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \; < \; f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0), \\ (>)$$

就说函数在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 有一个真正的极大值 (极小值), 否则极大值 (极小值) 就称为广义的.

极大值极小值统称为极值.

设函数在某点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 处有极值.

我们要证明, 若在这点有有限偏导数

$$f'_{x_1}(x_1^0, \cdots, x_m^0), \cdots, f'_{x_m}(x_1^0, \cdots, x_m^0)$$

存在, 则这些偏导数就都为零. 于是一阶偏导数为零是极值存在的**必要**条件.

为此目的, 设 $x_2 = x_2^0, \cdots, x_m = x_m^0$, 只留下 x_1 变动, 于是即得一元 x_1 的函数:

$$u = f(x_1, x_2^0, \cdots, x_m^0).$$

因为我们曾假定了在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 有极值 (为确定起见, 设是极大值) 存在, 因此推得, 特别是在点 $x_1 = x_1^0$ 的某邻域 $(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1)$ 中必然成立不等式

$$f(x_1, x_2^0, \cdots, x_m^0) \leqslant f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0).$$

于是上述一元函数在点 $x_1 = x_1^0$ 就有极大值, 而由费马定理 [第 **100** 段] 得

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0) = 0.$$

同样地可以证明在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 其余的偏导数也都为零.

因此, 关于极值为 "可疑" 的点就是那些在其处一阶偏导数全取零值的点; 它们的坐标可由解以下方程组

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

求出.

正如在一元函数的情况一样, 这类点叫做静止点.

152. 静止点的研究 (二元函数的情况) 正如在一元函数时一样, 在静止点不一定保证有极值存在. 若以取简单的函数 $z = xy$ 为例, 则 $z'_x = y$ 与 $z'_y = x$ 只在唯一的一点 —— 原点 (0, 0) 同时为零, 在这点 $z = 0$. 但同时很明显, 在这点的任一邻域中函数既取正值又取负值, 因而没有极值. 图 59 画的就是 $z = xy$ 所表示的曲面 (双曲抛物面); 在原点附近其形状是鞍形, 而在一个垂直的平面上向上弯曲, 而在另一个垂直的平面上向下弯曲.

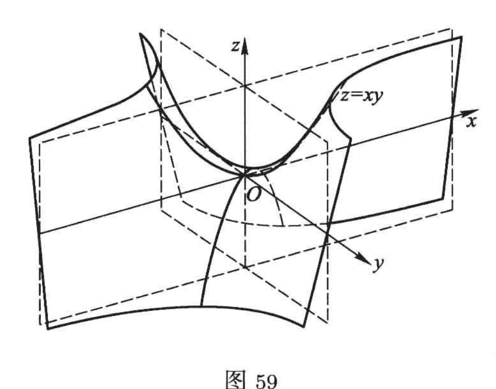


图 59

于是就产生了极值存在 (或不存在) 的充分条件的问题, 引起了对静止点所应加补充的探讨.

我们限于二元函数 $f(x, y)$ 的情形. 设在某点 (x_0, y_0) 的邻域中, 这函数有定义, 连续, 且有连续的一阶及二阶偏导数, 并设此点为静止点, 即满足条件

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1a}$$

为要确定我们的函数是否在点 (x_0, y_0) 真有极值, 自然要来考虑差数

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

按照具有拉格朗日型余项的泰勒公式 [第 **150** 段, (5)] 展开到第二项为止. 然而由于假定 (x_0, y_0) 是静止点, 故第一项消失而有

$$\Delta = \frac{1}{2!}\{f''_{x^2} \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{y^2} \cdot \Delta y^2\}. \tag{2}$$

这里增量 $\Delta x, \Delta y$ 就由差数 $x - x_0, y - y_0$ 充任, 而一切导数是在某点

$$(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$

去算值的.

现在引入这些导数在被考察点处的值:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{3}$$

并令

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) = a_{11}+\alpha_{11},$$
$$f''_{xy}(\cdots) = a_{12}+\alpha_{12};\quad f''_{y^2}(\cdots) = a_{22}+\alpha_{22},$$

则由二阶导数的连续性, 有:

$$\text{当}\quad \Delta x\to 0,\quad \Delta y\to 0\quad\text{时}\quad\text{一切}\quad \alpha\to 0. \tag{4}$$

差数 Δ 现可写为

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}.$$

我们要证明, Δ 的状态根本有关于表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 的符号.

为便于论证, 令 $\Delta x=\rho\cos\varphi, \Delta y=\rho\sin\varphi$, 其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 是 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离. 于是, 有

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}.$$

1°. 首先设 $\boldsymbol{a_{11}\,a_{22}-\,a_{12}^2>0}$.

这时 $a_{11}a_{22}>0$, 故 $a_{11}\neq 0$, 而括号 $\{\cdots\}$ 中的前一个二次三项式可写作

$$\frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\sin^2\varphi]. \tag{5}$$

由此明显地知括号 $[\cdots]$ 中之表达式恒为正, 于是上述的二次三项式对一切 φ 的值皆不为零, 而保持着与系数 a_{11} 相同的符号. 其绝对值, 由于 φ 是在 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 故有 (显然为正的) 最小值 m:

$$|a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi|\geqslant m>0.$$

另一方面, 在考虑括号 $\{\cdots\}$ 中第二个二次三项式时, 则由 (4), 只要 ρ (同时 $\Delta x,\Delta y$) 充分小, 则对于一切 φ, 就有

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi|\leqslant|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|<m,$$

于是在括号 $\{\cdots\}$ 中整个表达式, 也就是说差数 Δ, 将保持着与第一个二次三项式相同的符号, 亦即是 a_{11} 的符号.

于是, 若 $a_{11}>0$, 则 $\Delta>0$, 而函数在被考察的点 (x_0,y_0) 有极小值, 而当 $a_{11}<0$ 时, 就有 $\Delta<0$, 而有极大值.

2°. 现在设 $\boldsymbol{a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0}$.

先讨论 $a_{11}\neq 0$ 的情况, 这时仍可应用变换 (5). 当 $\varphi=\varphi_1=0$ 时, 括号 $[\cdots]$ 中表达式成为 a_{11}^2, 故为正值. 反之, 若由条件

$$a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0 \quad (\sin\varphi_2\neq 0)$$

确定 $\varphi=\varphi_2$, 则括号 $[\cdots]$ 中的表达式成为 $(a_{11}a_{12}-a_{12}^2)\sin^2\varphi_2$ 而为负. 当 ρ 充分小时, 括号 $\{\cdots\}$ 中的第二个二次三项式当 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2$ 时都可充分小, 而使 Δ 的符号由第一个二次三项式的符号来决定. 于是在被考察点 (x_0,y_0) 的任一个邻域中在辐角为 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2$ 的两条射线上, 差数 Δ 有异号的值. 因此, 在这点不可能有极值.

若 $a_{11}=0$, 则括号 $\{\cdots\}$ 中的第一个二次三项式变为

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=\sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi).$$

这时一定有 $a_{12}\neq 0$, 故可确定角 $\varphi_1\neq 0$ 使

$$|a_{22}||\sin\varphi_1|<2|a_{12}||\cos\varphi_1|.$$

故当 $\varphi=\varphi_1$ 与 $\varphi=\varphi_2=-\varphi_1$ 时上述的二次三项式有相反的符号, 于是再像前面一样来完成讨论.

*于是,若 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, 则函数 $f(x,y)$ 在所考察的静止点 (x_0,y_0) 处有极值, 即当 $a_{11}<0$ 时有***极大值***, 而当 $a_{11}>0$ 时有***极小值***. 若 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ 则没有极值.*

至于在 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ 的情况, 要想解决这个问题就要牵涉到更高阶的导数; 这个 “可疑” 情况我们暂置不论.

附注 欧拉最初注意到, 条件

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

对于函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点有极值是*必要*的. 然而他错误地以为, 函数分别地对于每个变元皆有同型极值出现 (例如当 f''_{x^2} 与 f''_{y^2} 同号时就是这样) 就是*充分*条件. 拉格朗日看出了欧拉的错误, 并确定了不等式

$$f''_{x^2}\cdot f''_{y^2}-(f''_{xy})^2>0$$

为充分条件. 也是他指出了, 相反的不等式就可决定极值不出现. 然而他没有彻底地论证这点.

例 1) 研究以下函数的极大与极小值:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \quad (p>0,q>0).$$

计算偏导数:

$$z'_x=\frac{x}{p}, \quad z'_y=\frac{y}{q}.$$

故立刻可见唯一的静止点即坐标原点 $(0,0)$.

计算 a_{11}, a_{12} 与 a_{22} 得

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{q};$$

故 $a_{11}a_{12}-a_{12}^2>0$. 因此, 在点 $(0,0)$ 函数 z 有极小值. 然而这也能直接看出.

这函数的几何图形是以坐标原点为顶点的椭圆抛物面 (第 **124** 段中图 55).

2) $$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}\quad(p>0,q>0);$$

我们有

$$z_x'=\frac{x}{p},\quad z_y'=-\frac{y}{q}.$$

这里也可看出, $(0,0)$ 是静止点.

我们算出

$$a_{11}=\frac{1}{p},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=-\frac{1}{q};$$

故 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. 于是没有极值.

在几何上, 我们遇到的是双曲抛物面, 其顶点是坐标原点.

3) $$z=y^2+x^4\quad 或\quad z=y^2+x^3;$$

在这两个情况下点 $(0,0)$ 都是静止点, 而在这点 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$.

我们的判别法不能给出答案; 然而显而易见, 在第一个情况有极小值出现; 而在第二个情况则没有极值.

153. 函数的最大值与最小值 · 例子 设函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 定义并连续于某个有界闭区域 $\mathscr{D}$ 中, 并在这个区域中有有限的偏导数. 由魏尔斯特拉斯定理 [第 **136** 段], 在这区域中一定可以找到一点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$, 使在其处函数取得它一切值中的最大 (最小) 值. 若此点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 在 $\mathscr{D}$ 的内部, 则在其处函数显然有极大值 (极小值), 于是在这一情况下, 我们所注意到的点一定包含在对于极值为 "可疑" 的静止点之中. 然而函数 u 也可能在区域边界上达到其最大 (最小) 值. 所以, 为了求出函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 中的最大 (最小) 值, 必须要在区域的内点中找出一切静止点, 即对于极值为 "可疑" 的点, 算出在这些点的函数值, 并把它们与区域界点上的函数值作比较: 这些值中的最大 (最小) 值, 就是函数在整个区域中的最大 (最小) 值.

我们举几个例子来说明.

1) 在由 x 轴, y 轴与直线 $x+y=2\pi$ 所围成的三角形区域 (图 60) 上求函数

$$u=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

的最大值. 我们有

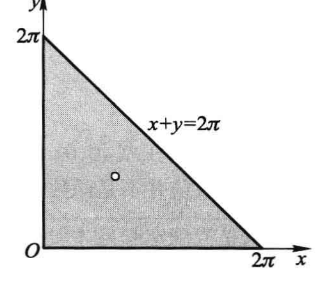


图 60

$$u_x'=\cos x-\cos(x+y),\quad u_y'=\cos y-\cos(x+y).$$

在区域的内部导数只在唯一的点 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 同时为零, 而在这点 $u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 因为在区域边界上, 即在直线 $x=0,y=0$ 与 $x+y=2\pi$ 上此函数为零, 因此, 在上述点 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 函数显然达到最大值.

2) 求非负数 x,y,z,t 之积

$$u=xyzt$$

的最大值, 但此四数之和为常数

$$x+y+z+t=4c.$$

我们要证明, 当这四个因子相等时: $x=y=z=t=c$[①], u 达到最大值.

由所给条件确定 t: $t=4c-x-y-z$, 代入 u 的表达式, 有

$$u=xyz(4c-x-y-z).$$

于是得到一个含三个自变量 x,y,z 的函数, 它定义在三维区域

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x+y+z\leqslant 4c$$

上. 在几何上这区域是一个四面体, 而由平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=4c$ 所围成.

算出偏导数并令它们等于 0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(4c-2x-y-z)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx(4c-x-2y-z)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy(4c-x-y-2z)=0.$$

在区域内部满足这些方程的只有一点 $x=y=z=c$, 而在这点 $u=c^4$. 因为在边界上 $u=0$, 故在所得点函数达到最大值.

于是我们的断言得证, 因为当 $x=y=z=c$ 时也有 $t=c$[②].

附注 在以上两个例中, 在所考察的区域内部都只有一个静止点. 且已证明函数在这点有极大值. 然而, 与一元函数情况不同 (见第 **118** 段附注), 这里, 由这种只有一个极大值的事实, 并不能作出结论, 说这个极大值就是函数在整个区域中的最大值.

下面的简单例子指明, 这样的结论, 实际上可能会得出不正确的结果. 考虑定义在矩形 $[-5,5;-1,1]$ 中的函数

$$u=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

其导数

$$u'_x=3x^2-8x+2y,\quad u'_y=2x-2y$$

在此区域中只在点 $(0,0)$ 为零. 用第 **152** 段的判别法容易证明, 在该处函数有极大值 (等于 0). 然而这个数值并不是函数在这区域中的最大值, 因为, 例如在点 $(5,0)$ 处函数值就是 25.

① 只是为确定起见才取因子数为四个; 对任意多个因子结果仍是一样.

② 由上述可知, 总和为 $4c$ 的四个正数的乘积 $xyzt$ 不会超过 c^4, 故

$$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant c=\frac{x+y+z+t}{4},$$

即几何平均数不超过算术平均数. 这结果对任意多个数字都正确.

由此, 在多元函数的情况, 当求函数在一个区域中的最大值与最小值时, 而去讨论它的极大值与极小值, 这在实用上是无必要的.

154. 问题 许多问题 —— 既有数学领域中的问题, 也有其他科学和技术领域中的问题 —— 都导致求某些函数最大值与最小值的问题.

问题 1)、2) 的解与上段考虑过的例子有关.

1) 在半径为 R 的已知圆的一切内接三角形中求面积最大的一个 (图 61).

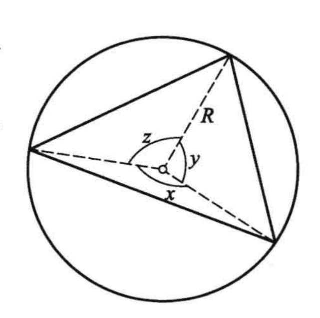
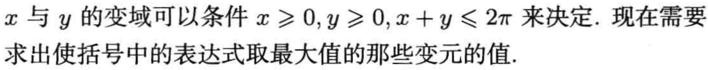


图 61

若以 x, y, z 表示三角形三边所张的圆心角, 则其间有关系式 $x+y+z=2\pi$, 由此 $z=2\pi-x-y$. 三角形的面积 P 可用这三个角表示如下:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}R^2\sin x+\frac{1}{2}R^2\sin y+\frac{1}{2}R^2\sin z\\
&= \frac{1}{2}R^2\cdot[\sin x+\sin y-\sin(x+y)].
\end{aligned}
$$



x 与 y 的变域可以条件 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2\pi$ 来决定. 现在需要求出使括号中的表达式取最大值的那些变元的值.

我们已知 [第 **153** 段, 1)], 这就是 $x=y=\dfrac{2}{3}\pi$, 故 $z=\dfrac{2}{3}\pi$: 于是得到等边三角形.

2) 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中, 求面积 P 为最大的一个.

设 x, y, z 表示三角形的边长, 则由已知公式

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

可以令 $z=2p-x-y$ 将 P 化为

$$P=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

并求这函数在某个三角形区域 (就是在第 **123** 段, 5) 中所讲过的那个区域) 中的最大值.

我们现在另用他法: 把问题转化为求正数之积

$$u=(p-x)(p-y)(p-z)$$

的最大值, 但这三个正数之和为常数:

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-2p=p.$$

我们已经知道 [第 **153** 段, 2)], 只有在所有因子都相等, 即 $x=y=z=\dfrac{2p}{3}$ 时才能达到最大值: 于是又得等边三角形.

3) 现在考虑具有并联插头的供电网路. 图 62 是线路草图, 而且 A 与 B 联在电源上, 而 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 各为需要电流 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的用电器, 设规定了在整个线路中电压降为 $2e$, 试求导线的截面积使整个线路耗铜最少.

显然, 只需考察一条导线 AA_n 即可, 因为另一导线处在类似的条件下. 以 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 表示线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 的长 (以 m 计), 以 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 表示其截面积 (以 mm^2 计). 于是表达式

$$u=l_1q_1+l_2q_2+\cdots+l_nq_n$$

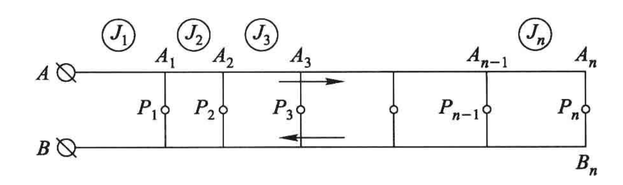


图 62

正表示所需铜的体积 (以 cm^3 计); 并要使其达到最小值, 而使在 AA_n 上的电压降为 e.

很容易计算在线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 中所经过的电流:

$$J_1 = i_1 + i_2 + \cdots + i_n, \quad J_2 = i_2 + i_3 + \cdots + i_n, \cdots, J_n = i_n.$$

若以 ρ 表示长为 1m 截面积为 $1\mathrm{mm}^2$ 的铜导线的电阻, 则以上线段的电阻为

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{q_1}, \quad r_2 = \frac{\rho l_2}{q_2}, \cdots, \quad r_n = \frac{\rho l_n}{q_n},$$

于是在诸线段上电压降, 由欧姆定律, 为

$$e_1 = r_1 J_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1}, \quad e_2 = r_2 J_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{q_2}, \cdots, e_n = r_n J_n = \frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

为了避免复杂的计算, 我们不用变量 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 而引入 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 其间有简单的关系式 $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = e$, 由此 $e_n = e - e_1 - e_2 \cdots - e_{n-1}$, 于是

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1}, \quad q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2}, \cdots, q_n = \frac{\rho l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_n},$$

而

$$u = \rho \left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \frac{l_2^2 J_2}{e_2} + \cdots + \frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_n}{e - e_1 - \cdots - e_{n-1}} \right],$$

而自变量 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 的变域由以下不等式规定:

$$e_1 > 0, \quad e_2 > 0, \cdots, \quad e_{n-1} > 0, \quad e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} < e.$$

令 u 对各自变量的偏导数为零, 即得方程组:

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$
$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0, \cdots,$$
$$-\frac{l_{n-1}^2 J_{n-1}}{e_{n-1}^2} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$

于是 (再引入 e_n) 即有

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} = \frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} = \cdots = \frac{l_n^2 J_n}{e_n^2},$$

为方便计, 令公比为 $\frac{1}{\lambda^2} (\lambda > 0)$. 于是

$$e_1 = \lambda l_1 \sqrt{J_1}, \quad e_2 = \lambda l_2 \sqrt{J_2}, \cdots, \quad e_n = \lambda l_n \sqrt{J_n},$$

而 λ 可以很容易地由 $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$ 得出:

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\cdots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

最后, 回到原来的变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 即得

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1},\quad q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2},\cdots,q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

于是, 最适合的截面面积与电流大小的平方根成正比.

附注 因为在这个情况变量 $e_1,e_2,\cdots e_{n-1}$ 的变域是开的, 于是魏尔斯特拉斯第二定理 [第 **136** 段] 不能直接适用. 然而注意到区域的边界由以下的关系式来决定:

$$e_1\geqslant 0,\quad e_2\geqslant 0,\cdots,\quad e_{n-1}\geqslant 0,\quad e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}\leqslant e,$$

其中至少有一个式子中等号成立. 于是当点 $(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1})$ 逼近边界时, 量 u 增长到无穷. 由此可知, 所得的 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 的值能使函数 u 达到最小值.

第十章 原函数 (不定积分)

§1. 不定积分及其最简单的计算法

155. 原函数概念 (及不定积分概念) 在许多科学技术问题中, 需要将已知导函数还原为原函数.

在 **78** 段里, 我们假设了已知运动方程 $s = f(t)$, 即路程随时间的变化而变化的规律, 我们用微分法先找出了速度 $v = \dfrac{ds}{dt}$, 然后又找出了加速度 $a = \dfrac{dv}{dt}$. 但事实上常常需要解决反面的问题: 给出了加速度 a, 为时间 t 的函数 $a = a(t)$, 而要来决定速度 v 及所历路程 s 与 t 的关系. 如此, 这里就要由函数 $a = a(t)$ 来还原到那个以 a 为导函数的函数 $v = v(t)$, 然后, 知道了函数 v, 来找那个导函数为 v 的函数 $s = s(t)$.

同样, 在 **78** 段里, 我们知道了沿 x 轴上直线段 $[0, x]$ 连续分布的质量 $m = m(x)$, 而用微分法找到了 "线性" 密度 $\rho = \rho(x)$. 但自然发生这样一个问题: 如何由已知密度变化律 $\rho = \rho(x)$ 来寻找所分布的质量本身? 这仍然就是要由已知函数 $\rho(x)$ 来求那个以 ρ 为导函数的原函数 $m = m(x)$.

一个已知区间 $\mathscr{X}$ 上的函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数[①] 或 $f(x)$ 的积分, 如果在此整个区间上 $f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导函数, 或者就是说, 如果 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分:

$$F'(x) = f(x) \quad 或 \quad dF(x) = f(x)dx^{②}.$$

求一个函数的全体原函数叫做它的 "积分" 或 "求积", 并且这是积分学里的问题之一; 显然, 这就是微分学基本问题的反面.

---

① "原函数" 这个名称始于拉格朗日 (参看 **78** 段第一个脚注).

② 在这情形也说, 函数 $F(x)$ 是微分式 $f(x)dx$ 的原函数 (或积分).

定理 如果在某一个 (有限的或无限的, 闭的或开的) 区间 $\mathscr{X}$ 上, 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 则函数 $F(x)+C$ 在 C 为任何常数时也为其原函数. 反之, 区间 $\mathscr{X}$ 上 $f(x)$ 的每个原函数都可以表成这个形式.

证 函数 $F(x)+C$ 与 $F(x)$ 同为 $f(x)$ 的原函数, 这一点是很明显的, 因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

现在设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任一原函数, 而在区间 $\mathscr{X}$ 上有

$$\Phi'(x)=f(x).$$

既然函数 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 在该区间上有同一导函数, 则它们相差一个常数 [**110** 段, 推论]:

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

这就是所要证明的.

由此定理可见, 只要知道函数 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 也就知道它的所有原函数了, 因为它们彼此只差一常数项.

因此, $F(x)+C$ 这个含任意常数 C 的式子就是具有导函数 $f(x)$ 或微分 $f(x)dx$ 的函数的**一般形式**. 这个式子就是函数 $f(x)$ 的不定积分而表以符号

$$\int f(x)dx,$$

其中已经蕴涵有任意常数在内. 乘积 $f(x)dx$ 称为被积式, 而函数 $f(x)$ 称为被积函数.

例 设 $f(x)=x^2$; 于是不难看出, 这个函数的不定积分就是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

这很容易用逆运算 —— 微分法来核验.

在此提醒读者注意: "积分" 号 $\int$ 下要写的是所求原函数的微分, 而不是导函数 (在上例中要写的是 x^2dx, 而不是 x^2). 下面 **175** 段将要说明, 这种写法乃出于历史传统; 它表现许多优点, 因此保持这种传统是合理的.

由不定积分的定义可直接推出下列性质:

1. $$d\int f(x)dx=f(x)dx,$$

即符号 d 与 $\int$ 当 d 在前时相互抵消.

2. 既然 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数, 我们有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

这也可写成

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见, $F(x)$ 前的符号 d 与 $\int$ 当 d 居后时也可相互抵消, 但须在 $F(x)$ 上添补一个任意常数.

回到开始时那个力学问题, 现在我们可以写

$$v = \int a(t)dt \quad \text{及} \quad s = \int v(t)dt.$$

为确定起见, 假设所指为匀加速运动, 例如在重力作用之下; 于是 $a = g$ (若竖直方向朝下算作正向) 并且不难理解

$$v = \int gdt = gt + C.$$

我们得出了速度 v 的一个表达式, 其中除时间 t 外还含有一个任意常数 C. 在不同 C 值之下, 在同一瞬间也可得出种种不同的速度之值. 所以我们现有的资料还不足完全解决问题. 要完全解决问题, 只要知道任一瞬间的速度值就够了. 例如, 设我们知道在 $t = t_0$ 时速度 $v = v_0$; 将这些值代入所得速度表达式

$$v_0 = gt_0 + C, \quad \text{由此得} \quad C = v_0 - gt_0,$$

现在我们的解就成为完全确定的形式:

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

其次, 我们来找路程 s 的式子. 我们有

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]dt = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(用微分法很容易验证原函数可取这样的形式). 这个新的未知常数 C' 可以这样来决定: 例如, 给定在瞬间 $t = t_0$ 路程 $s = s_0$; 如此找出了 $C' = s_0$, 于是所求的解可写成这最后的形式:

$$s = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

t_0, s_0, v_0 诸值相约称为 t, s, v 诸变量的初值.

同样可以写

$$m = \int \rho(x)dx.$$

这里积分时出现常数 C; 这次它可由 “$x = 0$ 时质量 m 也应化为 0” 这个条件来决定.

156. 积分与求面积问题 既然历史上原函数概念是密切联系着求面积问题的，那么我们在此就来讲一讲这个问题 (采用的是平面图形面积的直观概念，这问题的严密提法则留待第十二章再讨论).

设在区间 $[a,b]$ 上给定了一个连续函数 $y=f(x)$，只取正值 (非负值). 我们来看这个图形 $ABCD$ (图 63)，它由曲线 $y=f(x)$、纵坐标线 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 轴的一段所包围；这种图形叫做*曲线梯形*. 要决定这个图形的面积 P，我们来考察变动图形 $AKLD$ 的面积的变化情况，这个图形是包围在初纵坐标线 $x=a$ 及相应于区间 $[a,b]$ 上任一 x 值的纵坐标线之间的. 在 x 变化时该面积也随着变化，而对每一 x 值都有其一个完全确定的相应值，如此曲线梯形 $AKLD$ 的面积是 x 的一个函数；表之以 $P(x)$.

现在我们的问题是要来*找这个函数的导数*. 因此我们给 x 一个增量 Δx (比如说是正的)，于是面积 $P(x)$ 也得一相应增量 ΔP.

设以 m 和 M 各表函数 $f(x)$ 在区间 $[x,x+\Delta x]$ 上的最小值和最大值 [**73** 段]，然后将面积 ΔP 与以 Δx 为底 m 和 M 为高的矩形面积作比较. 显然有

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

因此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

若 $\Delta x \to 0$，则由于连续性 m 和 M 将趋于 $f(x)$，而此时也就有

$$P'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

如此，我们导出了这个著名的定理 —— 世称*牛顿 - 莱布尼茨定理*[①] —— *变动面积 $P(x)$ 对有限横坐标的导数就等于有限纵坐标 $y=f(x)$*.

换句话说，*变动面积 $P(x)$ 就是所给函数 $y=f(x)$ 的***一个原函数**. 这个原函数在一切其他原函数中具有这样的特征：它在 $x=a$ 时化为 0. 所以，只要知道函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$，并按前段的定理

$$P(x) = F(x) + C,$$

则常数 C 就容易决定，在此令 $x=a$:

$$0 = F(a) + C, \text{ 如此得 } C = -F(a).$$

终于得出

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

①事实上，这个命题已由牛顿的学生*艾萨克 · 巴罗*(1630 — 1677) 所发表，虽然形式不同.

要得整个曲线梯形 $ABCD$ 的面积 P 则只需取 $x=b$:

$$P=F(b)-F(a).$$

作为一个例子, 我们来求这样一个图形的面积 $P(x)$: 它由抛物线 $y=ax^2$、相应于所给 x 值的纵坐标线及 x 轴的一段所围成 (图 64); 既然该抛物线切 x 轴于坐标原点, 则 x 的初值在此等于 0. 函数 $f(x)=ax^2$ 的原函数容易找出: $F(x)=\frac{ax^3}{3}$. 这函数恰好在 $x=0$ 时化为 0, 如此

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[参看 **43** 段, 3].

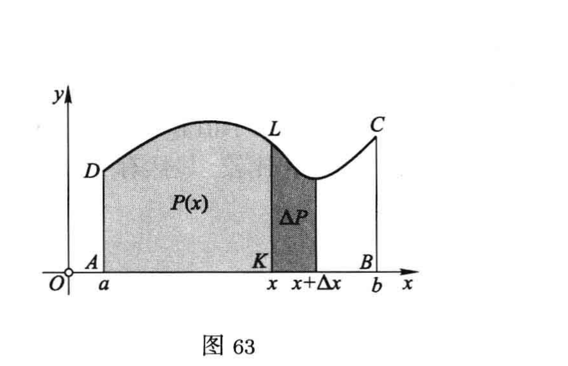


图 63

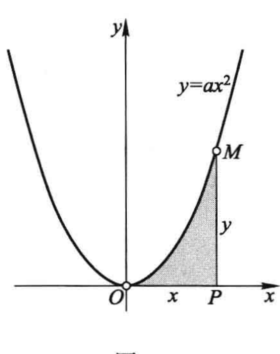


图 64

有鉴于这种计算积分与求平面图形面积的关系, 或者说与成方的关系①, 通常也就称积分的计算为成方或求积.

要把以上所说的完全推广到函数也取负值的情形, 只需约定将图形落在 x 轴下面部分的面积算作负的.

如此, 不论 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是一个怎样的函数, 读者总可以想象其原函数为该函数图像所围的变动面积. 但把这种几何说明当作原函数存在的证明当然是不行的, 因为面积概念本身还没有严格建立.

在下一章 **183** 段我们将能对这个重要事实给一严密的纯解析的证明: 每个在某区间里连续的函数在该区间里必有原函数. 目前我们先承认这个事实.

在本章里凡称原函数都只对连续函数而言. 如果一个函数具体给出而有不连续点, 则我们只考虑使它连续的区间. 因此, 承认了上面所陈述的事实以后, 我们就无需每次都声明积分的存在: 我们所考虑的积分全是存在的.

157. 基本积分表 微分学里每个确定某函数 $F(x)$ 的导函数是 $f(x)$ 的公式都可以导出一个相应的积分公式

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

①квадратура 一字原系 "将图形化为方形" 以便计算面积之意, 通常也就意译为求积分而与 интетрирование 没有分别. —— 译者注

把 **81** 段的初等函数微分法公式搬过来, 我们马上就能做出下面这个积分表:

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$
3. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

关于公式 4 我们略作解释: 它适用于任何不包含 0 的区间. 事实上, 如果这个区间落在 0 的右边, 则 $x > 0$, 而由已知微分法公式 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 立即推知

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

如果该区间落在 0 的左边而 $x < 0$, 则由微分法容易看出 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$, 因此

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

这两个公式合并起来就成公式 4.

上面这积分表的应用范围可以由积分法则予以扩充.

158. 最简单的积分法则 I. 若 a 为常数 $(a \neq 0)$, 则

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

事实上, 微分等式右边, 得 [**91** 段, I]

$$d\left[a \cdot \int f(x)dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x)dx\right] = a \cdot f(x)dx,$$

所以这个式子就是微分式 $a \cdot f(x)dx$ 的原函数, 这就是所要证明的.

如此, *常数因子可以提到积分号外面来*.

II. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

微分等式右边 [参看 **91** 段, II]:

$$d\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] = d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx$$
$$= [f(x) \pm g(x)]dx;$$

如此, 该式即最后这个微分式的原函数, 这就是所要证明的.

诸微分之和 (或差) 的不定积分等于各微分的积分之和 (或差).

注 对这两个公式我们加注如下. 公式里的不定积分每个都含有任意常数项. 这样的等式应理解为两边差一常数. 有时这种等式也可按表面理解为完全相等, 但此时其中所出现的积分有一个就不是任意的原函数了: 它的常数在其他积分的常数值选定后也就跟着确定. 这个重要的笺注此后要记在心头.

III. 若

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$

事实上, 该关系式即等价于:

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t).$$

于是

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b) \cdot a = a \cdot f(ax+b),$$

所以

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

即 $\frac{1}{a}F(ax+b)$ 事实上为函数 $f(ax+b)$ 的原函数.

特别常见的是 $a=1$ 或 $b=0$ 时的情形:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C_1, \quad \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C_2.$$

(其实法则 III 是不定积分变量替换法则的一个很特殊的情形, 关于一般法则后面 **160** 段里要讲.)

159. 例 1) $\int(6x^2-3x+5)dx$.

应用法则 Ⅱ 和 Ⅰ (及公式 3、2), 我们有:

$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx$$
$$=6\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

一般多项式也容易积分.

2) $$\int(1+\sqrt{x})^4dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx$$
$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int xdx+4\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^2dx$$
$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C.\quad(\text{Ⅱ, Ⅰ; 3, 2})$$

3) $$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$
$$=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C.\quad(\text{Ⅱ; 3})$$

我们给几个法则 Ⅲ 的应用实例:

4) (a) $$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C,\quad(\text{Ⅲ; 4})$$

(b) $$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int(x-a)^{-k}dx$$
$$=\frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+C=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C\quad(k>1).\quad(\text{Ⅲ; 3})$$

5) (a) $$\int\sin mxdx=-\frac{1}{m}\cos mx+C\quad(m\neq 0),\quad(\text{Ⅲ; 8})$$

(b) $$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\sin mx+C\quad(m\neq 0).\quad(\text{Ⅲ; 9})$$

6) (a) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0),\quad(\text{Ⅲ; 6})$$

(b) $$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.\quad(\text{Ⅲ; 5})$$

分母较复杂的分式如果先把它分解为几个分母较简单的分式之和再来积分, 往往可以容易一些. 例如,

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

所以

7) $$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

某些三角函数式经适当初等变换后也可以用最简单的法则来积分.

显然, 例如

$$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2},$$

因此

$$8)\ \text{(a)} \int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + C, \qquad (m \neq 0)$$
$$\text{(b)} \int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C.$$

160. 换元积分法 我们来讲一种最强的积分法 —— 换元积分法或替换法. 它所根据的是下面这一简单的事实:

如果知道了

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

则有

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C.$$

[所有在此出现的函数 $g(t), \omega(x), \omega'(x)$ 都假设是连续的.]

这可直接由复合函数微分法则 (见 **84** 段)

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x)) = G'(\omega(x)) \cdot \omega'(x) = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)$$

推出, 只要注意到在此 $G'(t) = g(t)$. 这也可以用另一种方式来表出: 我们说,

$$dG(t) = g(t)dt,$$

这关系式在自变量 t 代以函数 $\omega(x)$ 时也仍成立 (参看 **92** 段).

设要计算积分

$$\int f(x)dx.$$

在许多情形下, 新变量可以选 x 的这样的函数: $t = \omega(x)$, 使被积式变成这样的形状:

$$f(x)dx = g(\omega(x)) \cdot \omega'(x)dx, \tag{1}$$

这里 $g(t)$ 是一个比 $f(x)$ 便于积分的函数. 于是, 按上面所说, 只要来找积分

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

使经 $t = \omega(x)$ 这个替换后可由它得出所求的积分. 通常也就简写成

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt, \tag{2}$$

而理解为在右边积分里的 t 的函数已做了上述替换.

例如, 我们来求积分

$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$

既然 $d\sin x = \cos x dx$, 则令 $t = \sin x$, 被积式变为

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d\sin x = t^3 dt.$$

最后一式的积分很容易算出:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

剩下只要以 $\sin x$ 代 t 而变回变量 x:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

要注意的是, 在选择简化被积式的替换 $t = \omega(x)$ 时要记得被积式中须有因子 $\omega'(x)dx$ 这个给出新变量 t 的微分的部分 [参看 (1)]. 在前例中替换 $t = \sin x$ 的成功是由于有 $\cos x dx = dt$ 这个因子.

关于这一点我们来看一个有教育意义的例子:

$$\int \sin^3 x dx.$$

这里替换 $t = \sin x$ 是不适用的, 因为没有所说那种因子. 如果由被积式里试图分出因子 $\sin x dx$ (或 $-\sin x dx$ 更好) 作为新变量的微分, 则替换应该是 $t = \cos x$; 既然剩下部分

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1,$$

在这替换之下简化, 则所取替换是适当的. 于是我们有

$$\int \sin^3 x dx = \int (t^2 - 1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

有时替换法也以与所说不同的形式来应用. 即, 在被积式 $f(x)dx$ 里直接以新变量 t 的函数 $x = \varphi(t)$ 来替换 x 而结果得出

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt.$$

显然, 如果在这个式子里作替换 $t = \omega(x)$, 这里 $\omega(x)$ 是 $\varphi(t)$ 的反函数, 我们就回到了所求的被积式 $f(x)dx$. 所以, 等式 (2) 依然成立, 而在此计算积分后右边应令 $t = \omega(x)$.

我们来求这个积分作为一个例子:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

根号下的平方差 (第一个平方是常数) 暗示我们三角替换 $x = a\sin t$.[①]

于是有

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t dt$$

①宜在此指出, x 看作是变化于 $-a$ 与 a 之间, 而 t 变化于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间. 所以 $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

并且

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

但我们已经知道积分

$$a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C$$

[**159** 段, 8]. 为了变回到 x, 我们令 $t = \arcsin \dfrac{x}{a}$; 第二项的变换这样做比较容易:

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t \cdot a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

如此终于得出

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

找适当替换的本领可以凭练习来培养. 虽然对此不能给什么一般的指示, 但有助于寻找替换的个别特殊方针读者可在下一段里找到一些. 在典型的情形, 替换法将在教程正文中指出.

161. 例 1) (a) $\displaystyle\int e^{x^2} \cdot x dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x dx}{1 + x^4}$.

a) **解** 设 $t = x^2$, 我们有 $dt = 2x dx$, 于是

$$\int e^{x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

b) **提示** 用同一替换法. **答案** $\dfrac{1}{2} \arctan x^2 + C$. 在两种情形积分都有这样的形式:

$$\int g(x^2) \cdot x dx = \frac{1}{2} \int g(x^2) dx^2,$$

这里 g 是一个便于积分的函数; 对于这种积分自然宜采取替换 $t = x^2$.

2) (a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

提示 所有这些积分都有这样的形式:

$$\int g(\ln x) \frac{dx}{x} = \int g(\ln x) d \ln x,$$

而用替换 $t = \ln x$.

答案 (a) $\dfrac{1}{2} \ln^2 x + C$; (b) $\ln \ln x + C$; (c) $-\dfrac{1}{\ln x} + C$.

3) 像

$$\int g(\sin x) \cdot \cos x dx, \quad \int g(\cos x) \cdot \sin x dx, \quad \int g(\tan x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

这样形状的积分分别采取替换

$$t = \sin x, \quad t = \cos x, \quad t = \tan x.$$

例如,

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + C = \arctan \sin x + C$;

(b) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$.

4) (a) $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$, (b) $\int \cot xdx$.

解 (a) 若令 $t = x^2+1$, 则分子 $2xdx$ 恰成 dt; 而该积分化为

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

我们要注意, 只要被积式分子成分母的微分而所设积分有

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}$$

形式时, 总是用 $t = f(x)$ 这个替换就解决问题了:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

这样我们有

(b) $\int \cot xdx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$ [参看 3(b)].

5) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

替换: $x = a\cdot\tan t$[①], $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, 如此 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 tdt = \frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t) + C$ [参看 **159** 段, 8)].

现在令 $t = \arctan\frac{x}{a}$ 并以 $\tan t = \frac{x}{a}$ 表示 $\sin t$ 及 $\cos t$ 而变回变量 x, 如此最后有

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}(\alpha \gtrless 0)$.

令 $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$ 而取 t 作新变量. 平方后, 等式两边的 x^2 可以消去, 结果得

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t},$$

如此

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - \frac{t^2-\alpha}{2t} = \frac{t^2+\alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt.$$

最后

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C.$$

---

①在此只要设 t 变化于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间.

162. 分部积分法 设 $u = f(x)$ 及 $v = g(x)$ 是两个 x 的函数, 各具有连续导函数 $u' = f'(x)$ 及 $v' = g'(x)$. 于是按乘积微分法则有 $d(uv) = udv + vdu$ 或 $udv = d(uv) - vdu$. 显然, $d(uv)$ 的原函数是 uv; 所以成立这个公式:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3}$$

这个公式就表出分部积分的法则. 它把 $udv = uv'dx$ 一式的积分化为 $vdu = vu'dx$ 一式的积分.

例如, 设要来求积分 $\int x\cos xdx$. 我们令

$$u = x, \quad dv = \cos xdx, \quad 如此 \quad du = dx, \quad v = \sin x^{①},$$

而按公式 (3) 有

$$\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C. \tag{4}$$

如此, 分部积分法能将复杂的被积函数 $x\cos x$ 化为简单的 $\sin x$. 顺便积分 $\cos xdx$ 而得出 v —— 这是"分部积分法"名称的来源.

用公式 (3) 来计算积分必须把被积式分解为两个因子: u 及 $dv = v'dx$, 其中第一因子在渡向等式右边的积分时要予以微分, 而第二因子要予以积分. 必须尽量使微分 dv 积分起来没有困难, 并使以 du 替代 u, 以 v 替代 dv 后总起来能使被积式化简. 如此, 在前例中显然不宜 (比如说) 取 xdx 作 dv 而取 $\cos x$ 作 u.

稍熟练后就不会对 u, v 的取法感觉困难而能立即运用公式了 [参看 (4)].

分部积分法适用范围较变量替换法稍窄, 但也有许多整类的积分是可以用这方法来计算的, 例如

$$\int x^k \ln^m xdx, \quad \int x^k \sin bxdx, \quad \int x^k \cos bxdx, \quad \int x^k e^{ax}dx, \ 等等.$$

163. 例 1) $\int x^3 \ln xdx$.

$\ln x$ 的微分能起简化作用, 所以我们设

$$u = \ln x, \quad dv = x^3dx, \quad 如此 \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{4}x^4$$

而

$$\int x^3 \ln xdx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2) (a) $\int \ln xdx$, (b) $\int \arctan xdx$.

在两种情形都取 $dx = dv$, 如此得:

(a) $\int \ln xdx = x\ln x - \int xd\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$;

①既然对于我们的目的只要有一种方式把 $\cos xdx$ 表为 dv 的形式就行了, 故无必要写出 v 的含任意常数的一般形式. 这话今后应记在心头.

(b) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int x d \arctan x = x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} dx$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ [**161** 段, 4(a)].

3) $\int x^2 \sin x dx$.

我们有

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2)$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

如此, 我们把所求的积分化成了已知的积分 [**162** 段, (4)]; 将该结果代入上式即得

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

在一般稍复杂的情形里分部积分法需要施用两次.

同样, 由重复施用此法可算出下列积分:

$$\int P(x) e^{ax} dx, \quad \int P(x) \sin bx dx, \quad \int P(x) \cos bx dx,$$

这里 $P(x)$ 是 x 的多项式.

4) 有趣的例子是积分

$$\int e^{ax} \cos bx dx, \quad \int e^{ax} \sin bx dx.$$

如果对它们施行分部积分法 (在两例都取, 比如说, $dv = e^{ax} dx, v = \frac{1}{a} e^{ax}$), 则得

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$
$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

如此, 每个积分均由另一积分所表出[①].

但如果以第二公式里的积分代入第一公式, 则导出一个关于第一积分的*方程*, 由此该积分定出为:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$$

同样求出第二积分为:

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C'.$$

5) 作为分部积分法应用的最后一个例子, 我们来推导计算这个积分的*递推公式*:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3 \cdots).$$

---

①如果把积分理解为*确定的*原函数 [参看 **158** 段注], 则要在第二公式中有与第一公式中相同的函数时, 严格说来, 应该在右边还附加一个常数. 当然, 它在最后的式子里将被常数 C 及 C' 所吸收.

应用公式 (3) 而令

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad \text{如此有} \quad du = -\frac{2nx \cdot dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

我们得出

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx.$$

后一积分可变换如下:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$
$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

将此式代入前面的等式, 我们得出这个关系:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

由此有

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \tag{5}$$

所得公式把积分 J_{n+1} 的计算化为 J_n 的计算, 使指标值降 1. 知道了积分

$$J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

[**159** 段, 6) (b); 我们取其一个值], 按此公式 $n = 1$ 时, 得

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a}$$

[这结果我们前面曾由别的方法得出, 参看 **161** 段, 5)]. 在公式 (5) 中令 $n = 2$, 更得

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a},$$

这样推下去. 如此我们可以对任何自然数指标算出积分 J_n.

§2. 有理式的积分

164. 有限形式积分法问题的提出 我们已经熟悉了一些计算不定积分的初等方法. 这些方法并不能确切预定计算一个积分时应走什么途径, 而往往只是提供给计算者很多技巧. 在这一段及以下各段我们将细讲一些重要的特殊类型的函数并且对其积分建立一种完全确定的计算程序.

现在我们来阐明, 在积分上述类型的函数时究竟要注意的是什么, 以及按照什么样的原则而把它们特别划分出来.

在 **25** 段里已经描述过数学分析首先应用到的函数的类别, 这就是所谓初等函数及由初等函数有限次算术运算及叠置所表出的函数 (未经极限过程).

在第五章里我们已经看到, 所有这种函数都是可微分的并且其导函数仍属于同一类型. 积分的情形就不同了: 常常会属于所说这类型的函数积分后不属于该类了, 也就是说, 不能以有限次上述操作用初等函数表出了. 属于这种显然不能表为有限形式的积分的例子有

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx,$$
$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

其他这类例子以后还要举出 [**169** 段及 **172** 段以下]. 所要注意的是, 所有这些积分事实上都是存在的①, 但它们只能表现为完全新型的函数, 而不能化为所谓初等函数.

能以有限形式实现其积分的函数所知道的只有不多几种类型; 这些类型我们将细加研究. 其中尤其应将有理函数这个重要类型放在第一位.

165. 简单分式及其积分 既然假分式可以分出整式部分而其积分并无困难, 我们只要从事真分式 (分子次数低于分母) 的积分就行了.

其中我们在此先细论所谓简单分式, 这就是下列四种类型的分式:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$
$$(k=2,3,\cdots) \qquad\qquad (m=2,3,\cdots)$$

这里 A, M, N, a, p, q 都是实数; 对 Ⅲ 及 Ⅳ 两型的分式我们假设三项式 x^2+px+q 无实根而

$$q-\frac{p^2}{4}>0.$$

对 Ⅰ 及 Ⅱ 两型分式我们已经会积分 [**159** 段, 4)]:

$$A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a|+C,$$
$$A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

至于 Ⅲ 及 Ⅳ 两型分式则其积分用下列替换可以省力. 我们由 x^2+px+q 一式里分出一个二项式的完全平方:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

最后括号里的式子按假设是正数, 可令其等于 a^2, 如果取

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

①参看 **156** 段对此所说的话. 后面 **183** 段我们还要谈到这一点.

现在我们采取替换

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

于是在 Ⅲ 型的情形我们有:

$$\begin{aligned}\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt\\&=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}\\&=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\arctan\frac{t}{a}+C,\end{aligned}$$

变回 x 并以 a 的原值代入则有:

$$\begin{aligned}\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=&\ \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)\\&+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.\end{aligned}$$

对于 IV 型由同样的替换得:

$$\begin{aligned}\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt\\&=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.\end{aligned}\tag{1}$$

右边的第一个积分容易用替换 $t^2+a^2=u, 2tdt=du$ 来计算:

$$\begin{aligned}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}&=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{u^{m-1}}+C\\&=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C.\end{aligned}\tag{2}$$

右边第二个积分在任意的 m 之下可以用 **163** 段 (5) 的递推公式来计算. 然后只剩下在结果中令 $t=\dfrac{2x+p}{2}$ 而恢复原变量 x.

到此简单分式的积分问题完全解决了.

166. 真分式的积分 如此, 简单分式的积分我们已经会做了. 至于任意的真分式, 则其积分要依据下面这个在代数课程里所证明的重要定理:

每个真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

都可以分解为有限个简单分式之和.

这真分式分解为简分式问题密切联系着其分母的因子分解问题. 大家知道, 每个带实系数的多项式都可以分解为 $x-a$ 及 x^2+px+q 型的实因子; 在此二次因子假设是没有实根的, 所以不能再分解为一次实因子. 把相同的因子 (如果有的话) 合并在一起, 并且为简单起见假设多项式 $Q(x)$ 的最高次项系数等于 1, 如此可以把这多项式的分解式简略地写成

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots \tag{3}$$

的形状, 这里 $k,\cdots,m,\cdots$ 是自然数.

我们注意, 如果多项式 Q 的次数是 n, 则显然所有指数 k 的总和加上所有指数 m 的总和的两倍就恰恰得出 n:

$$\sum k+2\sum m=n. \tag{4}$$

在代数里已经证明, 对于真分式分母分解式中每个像 $(x-a)^k$ 这样的因子, 恒有这样一组 k 个简单分式与之相应:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{5}$$

而对于每个像 $(x^2+px+q)^m$ 这样的因子, 恒有这样一组 m 个简单分式与之相应:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{6}$$

这里 A,M,N 等都是数字系数. 如此, 知道了分解式 (3), 则所给分式 $\frac{P}{Q}$ 所要分解成的简单分式的分母也就知道了. 剩下的只是决定分子的问题, 也即决定 A,M,N 等系数的问题. 既然 (5) 组分式的分子有 k 个系数, 而 (6) 组分式的分子有 $2m$ 个系数, 则由 (4) 式其总数为 n.

要决定上述系数通常采用待定系数法, 其法如下. 知道了分式 $\frac{P}{Q}$ 的分解式的形式, 将它写在等式右边, 分子里带着待定系数 (用字母表出). 所有简单分式的公分母显然应该是 Q; 把它们加起来而得一真分式[①]. 现在如果将两边的分母 Q 去掉, 则得一个 x 的恒等式, 其两边都是 $n-1$ 次的多项式. 右边多项式各 x 方幂的系数都是待定系数的一次齐次式; 将它们各与多项式 P 的相应数字系数对等起来, 终于得出一组 n 个一次方程, 由此定出诸待定系数. 既然预先知道该分式一定能分解为简单分式, 故所说这组方程也一定是可解的, 即不会是矛盾的.

况且, 既然所说这组方程无论其自由项 (即多项式 P 的系数) 如何选择总是有解的, 则其行列式必不等于 0. 换句话说, 这组方程总是有定解的. 如此也就顺便证明了真分式分解为简单分式的分解法是唯一的.

①有理真分式之和恒为真分式.

以上所说的现在举例说明如下.

设给了一分式 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. 按一般的定理, 它应有这样的分解式:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

我们来决定其系数 A, B, C, D, E, 由这个恒等式出发:

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

对等两边 x 同方幂的系数, 我们得一组五个方程

$$\begin{array}{c|l} x^4 & \quad A+B \qquad\qquad\quad = 0, \\ x^3 & -2B+C \qquad\qquad = 0, \\ x^2 & \quad 2A+B-2C+D = 2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E = 2, \\ x^0 & \quad A-2C-2E \qquad = 13, \end{array}$$

由此解得

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

最后得出

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

刚才所建立的代数事实可直接应用于有理分式的积分. 我们在上一段已经看到, 简分式可积分为有限的形式. 现在我们对任意的有理分式也同样可以这样说. 如果考察一遍用以表出多项式及真分式的积分的函数的类别, 则可陈述出这个比较确切的结果:

任何有理函数的积分都能以有限的形式用有理函数、对数函数及反正切函数表出.

例如, 回到刚才那个例子并记得前面所导出的公式 [**165** 段], 我们有:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\arctan x + C.$$

注 简分式 (部分分式) 分解法起源于莱布尼茨. 他很轻松地克服了分母里的一次因子, 哪怕是相应于重根的. 在虚根的情形莱布尼茨则将每个这种根与其共轭根两两结合而得实二次式. 但他不是永远成功的: 例如

$$x^4 + a^4 = (x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2).$$

这个分解法他当时就不会, 而是后来泰勒所指出的. 决定简分式分子的待定系数法属于约翰 · 伯努利.

167. 奥斯特罗格拉茨基的积分有理部分分出法 奥斯特罗格拉茨基[①]指出了一种方法, 使真分式的积分大为简化. 这方法能把积分的有理部分以纯代数方式分离出来.

我们已经看到 [**165** 段], 积分 Ⅱ 与 IV 型简分式时, 在积分结果中得出有理项. 在前一种情形积分立即可以写出:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \tag{7}$$

现在我们来确定, 积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx \quad \left(m>1,\ q-\frac{p^2}{4}>0\right)$$

究竟有怎样的有理部分.

采用我们所熟悉的替换 $x+\dfrac{p}{2}=t$ 而利用等式 (1)、(2) 及 **163** 段的递推公式 (5), 在此 $n=m-1$. 若回到原变量 x 则得

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

这里 M', N' 及 α 表示常数系数, 按此公式, 将 m 代以 $m-1$, 若 $m>2$, 则对其中后一积分我们有

$$\int \frac{\alpha dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

如此递推, 直到右边积分中三项式 x^2+px+q 的指数降至 1 为止. 所有逐次分出的有理项都是真分式. 归并起来得结果如下:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda\int\frac{dx}{x^2+px+q}, \tag{8}$$

这里 $R(x)$ 是一个多项式, 其次数低于分母[②], 而 λ 是一个常数.

设有一不可约真分式 $\dfrac{P}{Q}$, 并设其分母 Q 分解成简单因子 [参看 (3)]. 于是将此分式的积分表为 (5) 及 (6) 形式的分式的积分之和. 若 k (或 m) 大于 1, 则所有分式组 (5) [或 (6)] 的积分除第一个外都可按公式 (7) [或 (8)] 来变换. 把所有这些结果归并起来, 终于导出这样一个公式:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{9}$$

这积分的有理部分 $\dfrac{P_1}{Q_1}$ 是由上面所分出的有理部分相加而得的; 因此它首先是一个*真分式*, 而其分母有分解式

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$

至于积分号下的分式 $\dfrac{P_2}{Q_2}$, 则它可由 I 及 Ⅲ 型分式相加而得, 如此它也是一个*真分式*而

$$Q_2(x) = (x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots.$$

显然 [参看 (3)], $Q=Q_1Q_2$.

[①] 米 · 瓦 · 奥斯特罗格拉茨基院士 (1801 — 1861) 是俄罗斯一位杰出的数学家和力学家.

[②] 参看 **166** 段脚注.

公式 (9) 叫做奥斯特罗格拉茨基公式.

经过微分, 该公式可变成这个等价的形式:

$$\frac{P}{Q}=\left[\frac{P_1}{Q_1}\right]'+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{10}$$

我们已经知道, 如果已知多项式 Q 的因子分解为式 (3), 则多项式 Q_1 及 Q_2 就容易找出. 但它们不靠这因子分解式也能决定. 事定上, 既然导数式 Q' 包含 Q 所分解成的全部因子, 而指数降一, 则 Q_1 就是 Q 和 Q' 的最大公因子, 因此可以由这些多项式用辗转相除之类的方法来决定. 如果 Q_1 已知, 则 Q_2 只要以 Q_1 除 Q 即得.

现在再来决定公式 (10) 里的分子 P_1 和 P_2. 这也用待定系数法.

以 n, n_1, n_2 各表多项式 Q, Q_1, Q_2 的次数, 而 $n_1+n_2=n$; 于是多项式 P, P_1, P_2 的次数将不高于 $n-1, n_1-1, n_2-1$. 我们把 P_1 及 P_2 设成带待定系数的 n_1-1 次及 n_2-1 次的多项式; 系数的个数总共是 n_1+n_2, 即 n 个. 我们把 (10) 里的微分做出来:

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P}{Q}.$$

现在我们来证明, 第一个分式恒可将其分母化为 Q, 而分子仍保持为整式, 即

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2}=\frac{P_1'Q_2-P_1H}{Q},$$

这里 H 表示 $\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}$. 但这个分式可表为整式. 事实上, 如果 Q_1 包含 $(x-a)^k$ 而 $k\geqslant 1$, 则 Q_1' 包含 $(x-a)^{k-1}$, 而 Q_2 包含 $x-a$; 对 $(x^2+px+q)^m (m\geqslant 1)$ 形式的多项式而言也可作同样的结论. 所以分子 H 可被分母整除, 而今后 H 可理解为整多项式 (次数为 n_2-1).

解除公分母 Q, 得恒等式

$$P_1'Q_2-P_1H+P_2Q_1=P,$$

其两端为 $n-1$ 次的多项式. 于是, 同上面一样, 要决定所引入的 n 个待定系数我们得一组 n 个一次方程.

既然已经证明, 无论 P 如何分解 (10) 总是可能的, 则该一次方程组无论常数项 (自由项) 如何选取总是有解的. 由此推知其行列式异于 0 而该方程组必有定解, 并且 (10) 式在所指定分母 Q_1 及 Q_2 之下, 其分解法是唯一的①.

例 设要分出积分

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$$

的有理部分.

我们有

$$Q_1=Q_2=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2}=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

①参看 **166** 段关于真分式分解为简分式的类似的话.

由此有

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

对等两边同次项的系数而得一方程组, 由此定出未知系数 $a,b,\cdots,f$:

$$\begin{array}{c|ll} x^5 & d=0\ (\text{在以下方程中 } d \text{ 已计入, 不再明写}) & \\ x^4 & -a+e=4 & \\ x^3 & -2b+e+f=4 & a=-1, b=1, \\ x^2 & a-b-3c+e+f=16 & c=-4, d=0, \\ x^1 & 2a-2c+e+f=12 & e=3, f=3. \\ x^0 & b-c+f=8 & \end{array}$$

如此, 所求积分为

$$\int\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\arctan x+C.$$

在这个例子里后一积分很容易一下就算出来. 在别的例子往往须重新分解为简分式. 但这方法也可与前面的方法结合起来.

§3. 某些根式的积分法

168. $R\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$① **型根式的积分法** 上面我们已讲过怎样以有限的形式求有理微分式的积分. 以下各种类型微分式的积分主要地就是要找这样的替换 $t=\omega(x)$ (这里 ω 就以初等函数表出), 将被积式化为有理形式. 这种方法我们叫做*被积式的有理化方法*.

作为这种方法的第一个应用实例我们来看这样的积分:

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{1}$$

这里 R 表示双自变量有理函数, m 是自然数, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是常数.

令

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

该积分化为

$$\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt;$$

①今后一律以 R 表示其自变量的有理函数.

这里微分式已经有了有理形式, 因为 R, φ, φ' 都是有理函数. 于是可以按前段的方法算出这个积分, 并令 $t=\omega(x)$ 而变回原变量.

可化为 (1) 型积分的还有这些更一般的积分:

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \cdots\right)dx,$$

这里所有指数 $r, s, \cdots$ 都是有理数; 只要把这些指数化为同分母 m 而使被积式成为 x 与 $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ 的有理函数就行了.

例 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}.$

令

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2};$$

于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1} &= \int\frac{-3dt}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\end{aligned}$$

这里 $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

169. 二项式微分的积分法 所谓二项式微分就是

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

这样的式子, 这里 a, b 是任意的常数, m, n, p 是有理数. 我们来讲这种式子积分成有限形式的情形.

这种特殊情形是很明显的: *如果 p 是整数* (正、负或零), 则上式成为前段所讨论的类型. 这就是说, 如果以 λ 表示分数 m 与 n 的分母的最小公倍数, 则我们在此有 $R(\sqrt[\lambda]{x})dx$ 这样的式子, 而其有理化只要采取替换 $t=\sqrt[\lambda]{x}$ 就行了.

现在我们用 $z=x^n$ 来把前面所给的式子予以变换.

于是有

$$x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

并且为简单计令

$$\frac{m+1}{n}-1=q$$

而有

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q dz. \tag{2}$$

如果 q 是整数, 则我们又将得到所讨论过的那种类型的式子. 事实上, 如果以 ν 表示分数 p 的分母, 则经变换后的式子有 $R(z, \sqrt[\nu]{a+bz})$ 的形式. 被积式的有理化可以用

$$t = \sqrt[\nu]{a+bz} = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$$

这个替换来实现.

最后, 我们把 (2) 式第二积分写成这样:

$$\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} dz.$$

容易看出, 在 $p+q$ 为整数时我们也有所讨论过的情形: 变换后的式子有 $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$ 的形式. 在所给积分中被积式也可立即由下列替换来有理化:

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}.$$

如此, 若

$$p, \quad q, \quad p+q$$

诸数中或 (同样)

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p$$

诸数中有一个成整数则两个积分 (2) 都可表为有限的形式.

这些可积分情形其实牛顿也已经知道. 但直到 19 世纪中叶切比雪夫才确定这可注意的事实: 二项式微分的其余情形是不能积分成有限形式的.

我们来看几个例子:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx.$

这里 $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$; 既然 $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, 则我们有第二种可积情形. 注意, $\nu=3$ 而 (按一般法则) 令

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x=(t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt,$$

于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12\int (t^6-t^3)dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C, \text{ 等等.}$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx.$

这次 $m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$ 而属第三种可积情形, 因为 $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$. 这里 $\nu=4$; 令

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$
$$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,$$

如此 $\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$ 而

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan t+C,$$

等等.

170. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ **型根式的积分法 · 欧拉替换法** 现在我们来看另一重要类型的积分

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx. \tag{3}$$

当然, 我们假设这二次三项式没有相等的根, 如此其平方根不能以有理式来替代. 我们来研究三种替换, 叫做欧拉替换, 由此这里的被积式总可以达成有理化.

第一种替换适用于 $a>0$ 的情形. 此时设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x^{①}.$$

把这等式两边平方, (对消两边的 ax^2 一项) 得 $bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$, 如此

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$
$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

欧拉替换的巧妙就在, 得出一个一次方程来决定 x, 如此 x 以及根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 同时都能以 t 的有理式表出.

如果把所得诸式化入 (3), 则问题化为求一个 t 的有理函数的积分. 最后须令

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$$

而恢复到变量 x.

第二种替换适用于 $c>0$ 的情形. 在这情形可以设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}^{②}.$$

①也可设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$.

②或设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$.

如果两边平方, 对消 c 并约去 x, 则得 $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$, 这又是一个 x 的一次方程. 由此有

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$
$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt.$$

将此代入 (3) 式, 显然我们就达成被积式的有理化. 于是积分以后, 而令

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

注 I 上面所考虑的两种情形 ($a>0$ 及 $c>0$) 一种可令 $x=\frac{1}{z}$ 而化为另一种. 因此总可以避免利用第二种替换.

最后, 第三种替换适合于二次三项式 ax^2+bx+c 有 (相异) 实根 λ 及 μ 的情形. 于是这三项式, 大家知道, 可分解为一次因子

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

我们设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

两边平方而约去 $x-\lambda$, 在此又得出一个一次方程 $a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$, 如此

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},\quad dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt,$$

等等.

注 II 在所作假设之下根式 $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ (为确定起见可认为, 比如说, $x>\lambda$) 可以变为

$$(x-\lambda)\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

的形式, 如此在所考虑的情形

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R_1\left(x,\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right),$$

而我们事实上所处理的就是 **168** 段里所讨论过的那种类型的微分. 第三种欧拉替换可写成

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

的形式, 这就与在 **168** 段所已指出的替换一样.

现在我们来证明, 单是第一及第三两种欧拉替换已经足够在一切可能情形来实现 (3) 中被积式的有理化了. 事实上, 如果三项式 ax^2+bx+c 有实根, 则我们已看出可适用第三种替换. 如其没有实根, 即如 $b^2-4ac<0$, 则三项式

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

在变量 x 的一切数值之下恒有 a 的符号 (正负号). $a<0$ 的情形我们不感兴趣, 因为此时根式完全没有实数值. 在 $a>0$ 的情形则适用第一种替换.

上面这些论证同时也就导出这个一般的结论: (3) 型积分总可以取有限的形式, 并且表出这种积分所需要的函数, 除去用以表出有理微分式积分的函数以外, 还只需要二次根式.

例　1) 在 **161** 段, 6) 我们事实上应用了第一种替换来计算积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(\alpha=\pm a^2).$$

虽然第二个基本积分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

我们已经会用初等的方法来做, 但为了练习起见, 我们现在仍用欧拉替换.

(a)　如果先用第三种替换

$$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x),$$

则

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4atdt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}$$

而

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

既然有恒等式

$$2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\quad(-a<x<a),$$

则这个结果只是在形式上与我们所已知的不同.

读者今后须估计到积分的结果会因所采用算法不同而得出不同的形式.

(b) 如果对此积分施用第二种替换

$$\sqrt{a^2-x^2}=xt-a,$$

则同样得出

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2\arctan t+C$$
$$=-2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C.$$

这里我们碰上另一种有趣的情况: 这结果分别适合于区间 $(-a, 0)$ 及区间 $(0, a)$, 而在点 $x=0$

$$-2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

失去意义. 此式在 $x\to -0$ 及 $x\to +0$ 时极限不同: 它们各等于 π 及 $-\pi$; 对上述两区间常数 C 各取不同数值, 使第二值比第一值大 2π, 如此能做成一个在全区间 $(-a, a)$ 上连续的函数, 只要在 $x=0$ 时取左右共同极限作函数值就行了.

这次我们还是得出了以前的结果, 只是形式不同, 因为我们有这个恒等式

$$-2\arctan\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}-\pi, & 0<x<a,\\[2mm] \arcsin\dfrac{x}{a}+\pi, & -a<x<0.\end{cases}$$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(a) 先采用第一种替换: $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$,

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}&=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt\\&=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt\\&=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C.\end{aligned}$$

如果在此令 $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$, 则最后得:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=&-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}\\&-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|+C.\end{aligned}$$

(b) 现在采用第二种替换: $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$,

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt,\quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}&=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt\\&=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt\\&=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C'.\end{aligned}$$

剩下在此令 $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$; 经明显的化简后得:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=&\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|\\&-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C'.\end{aligned}$$

这式子虽形式上与前面所得的不同, 但在 $C' = C + \frac{3}{2}$ 这关系之下与前式是恒等的.

§4. 含有三角函数及指数函数的式子的积分法

171. 微分式 $R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分法 这样形式的微分可以用替换 $t = \tan\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ 来有理化. 事实上,

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

而

$$R(\sin x, \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

如此, 像

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

这种类型的积分恒可积为有限的形式; 其表达式, 除有理微分式的积分结果中所见的各种函数以外, 只还需要三角函数.

上述替换虽普遍适用于 (1) 型积分, 但有时引起较复杂的计算. 下面将指出一些可以用较简单替换达成目的的情形. 我们先讲一点初等代数的预备知识.

如果一个有理整函数或分式函数 $R(u, v)$ 在其一个自变量, 比如说 u, 变号时不变其值, 即如果

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

则它可以化为

$$R(u, v) = R_1(u^2, v)$$

的形式, 其中只含 u 的偶数次方幂.

反之, 如果函数 $R(u, v)$ 在 u 变号时变值, 即如果

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

则它将化为

$$R(u, v) = R_2(u^2, v) \cdot u$$

的形式; 这只要把上面的话应用到函数 $\frac{R(u, v)}{u}$ 上立即可以推出.

I. 现在设 $R(u, v)$ 随着 u 一同变号, 于是

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x)dx &= R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx \\ &= -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x, \end{aligned}$$

而有理化可由替换 $t=\cos x$ 达成.

Ⅱ. 同样, 如果 $R(u,v)$ 随着 v 一同变号, 则

$$R(\sin x,\cos x)dx = R_0^*(\sin x,\cos^2 x)\cos x dx = R_0^*(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x,$$

如此这里宜取替换 $t=\sin x$.

Ⅲ. 最后, 我们假设函数 $R(u,v)$ 在 u 和 v 同时变号时不变其值:

$$R(-u,-v)=R(u,v).$$

在这情形, 以 $\frac{u}{v}v$ 替代 u 将有

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right).$$

按函数 R 的性质, 如果 u 和 v 变号 (此时比率 $\frac{u}{v}$ 不变),

$$R^*\left(\frac{u}{v},-v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right),$$

于是我们知道

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R_1^*\left(\frac{u}{v},v^2\right).$$

所以

$$R(\sin x,\cos x)=R_1^*(\tan x,\cos^2 x)=R_1^*\left(\tan x,\frac{1}{1+\tan^2 x}\right),$$

写简单一点, 即

$$R(\sin x,\cos x)=\widetilde{R}(\tan x).$$

这里可以由替换 $t=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 达成目的, 因为

$$R(\sin x,\cos x)dx=\widetilde{R}(t)\frac{dt}{1+t^2}, \text{ 等等.}$$

注 应该在此提一下, 不论 $R(u,v)$ 是怎样的有理函数, 总可表之为三个上述特殊类型的式子之和. 例如, 可以使

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

第一式在 u 变号时变号, 第二式在 v 变号时变号, 第三式则在 u 与 v 同时变号时不变其值. 将 $R(\sin x,\cos x)$ 式分为相应诸项, 则可在第一项上施用替换 $t=\cos x$, 在第二项上施用替换 $t=\sin x$, 在第三项上施用替换 $t=\tan x$. 如此, 对于 (1) 型积分的计算这三个替换就够了.

例 1) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. 被积式在 $\cos x$ 代以 $-\cos x$ 时变号. 故取替换 $t = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. 被积式在 $\sin x$ 代以 $-\sin x$ 及 $\cos x$ 代以 $-\cos x$ 时不变其值. 于是取替换 $t = \tan x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C \\ &= \tan x - 2\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.\end{aligned}$$

3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$. 取替换 $t = \cos x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

4) $\frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx$ $(0 < r < 1, -\pi < x < \pi)$. 在此我们一律施用替换 $t = \tan\frac{x}{2}$. 如此有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx &= (1-r^2)\int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} \\ &= \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right) + C = \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

下面这样的积分也可化为这个积分:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2}dx &= \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}x + \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

172. 其他情形概述 在 **163** 段我们已提到过, 如何积分下列各种形式的式子:

$$P(x)e^{ax}dx, \quad P(x)\sin bx dx, \quad P(x)\cos bx dx.$$

这里 P 是一个整式. 值得注意的是, 分式 (n 为自然数)

$$\frac{e^x}{x^n}dx, \quad \frac{\sin x}{x^n}dx, \quad \frac{\cos x}{x^n}dx$$

就已经不能以有限的形式积分出来了.

用分部积分法容易给这些式子的积分建立起递推公式并各归结为三种基本情形:

I. $\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \mathrm{li}\, y$①（“积分对数”）;

II. $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{si}\, x$（“积分正弦”）;

III. $\int \frac{\cos x}{x}dx = \mathrm{ci}\, x$（“积分余弦”）②.

我们已经知道 [**163** 段, 4)] 这几个积分:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C,$$
$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

依据它们, 能以有限形式来求积分

$$\int x^n e^{ax}\sin bxdx, \quad \int x^n e^{ax}\cos bxdx,$$

这里 $n = 1, 2, 3, \cdots$. 也就是说, 按分部积分法我们得:

$$\int x^n e^{ax}\sin bxdx = x^n\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bxdx + \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bxdx,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bxdx = x^n\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bxdx - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bxdx.$$

这两个递推公式可以把我们所要考虑的积分归化为 $n = 0$ 的情形.

§5. 椭圆积分

173. 定义 由 **170** 段所讨论的像

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

这样永可积为有限形式的积分, 我们自然联想到像

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx, \tag{1}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx \tag{2}$$

①用替换 $x = \ln y$.

②但三种情形都还该决定其任意常数; 这以后要做.

这种含有三次或四次多项式平方根的积分. 这是一类很重要的积分, 在实用上常会遇到. 但要知道像 (1)、(2) 这样的积分**一般**已经不能以有限形式用初等函数表出了. 所以我们放在最后一段来讲, 以免打断本章的主要路线, 既然本章主要目的是讨论各类能表为有限形式的积分.

根号下的多项式假设其有实系数. 此外, 我们永远认为它没有重根, 因为否则就可以由根号里提出一个一次因子, 如此问题就变成前面所讨论过的式子的积分, 而能以有限形式表出了. 最后的情形有时即使没有重根也可以发生; 例如, 不难验证

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}dx = x\sqrt{2x^3+1} + C.$$

像 (1) 及 (2) 类型的积分一般称为*椭圆积分*, 因为这种积分最初是在解椭圆弧长问题 [**201** 段, 4)] 时遭遇到的. 但这名称取严格意义时通常只指其中*不能表为有限形式*的那些积分而言; 其他像刚才所举两例则称为*伪椭圆积分*.

(1) 及 (2) 形式的积分在任意系数 $a, b, c, \cdots$ 之下研究或列表 (即做数值表) 当然都是相当困难的. 因此自然希望把所有这些积分化为少数的典型, 使其中所含任意系数 (参变量) 尽量减少.

174. 化为典式 我们首先指出, 一般只要讨论根号下是四次多项式的情形就够了, 因为三次的情形也很容易化为四次的情形. 事实上, 带实系数的三次多项式 ax^3+bx^2+cx+d 必须有一实根 [**69** 段], 比如说是 λ, 于是可以有这样的实因子分解式

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

替换 $x-\lambda = t^2$ 或 $x-\lambda = -t^2$ 就可实现所要求的变化:

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+\cdots})dx = \int R(t^2+\lambda, t\sqrt{at^4+\cdots})2tdt.$$

此后我们只来讨论 (2) 型那种含有四次多项式平方根的积分.

用我们在此所不能细讲的初等变换及替换, 首先每个椭圆积分 (2) —— 除去能表为有限形式的以外 —— 都可化为像

$$\int \frac{R(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{3}$$

这样形式的所谓*典式*积分, 这里 k 是一个正的真分数: $0<k<1$.

由有理函数 R 分离出整式部分之后, 对于剩下的那个分解成简分式的真分式终于可以有这样的一般结论: *所有椭圆积分 —— 除能表为有限形式诸项外 —— 都可以用初等替换化为下列三种***标准***积分*:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

及

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0<k<1),$$

这里最后一个积分中 h 也可以是复数. 这些积分经刘维尔指出已不能成有限的形式. 勒让德[①] 分别称之为*第一类、第二类、第三类椭圆积分*. 前两类只含一个参变量 k, 而最后一类则除此以外还有一个参变量 h (复数的).

① A. M. Legendre (1752 — 1833) 及 J. Liouville (1809 — 1882) 都是法国的杰出数学家.

勒让德还利用替换 $z=\sin\varphi\left(\varphi \text{ 由 } 0 \text{ 变至 } \frac{\pi}{2}\right)$ 给这些积分带来了更进一步的化简. 如此第一类积分直接化为

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \tag{4}$$

第二类这样变化:

$$\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi,$$

即化为一个前一类的积分及一个新的积分

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi. \tag{5}$$

最后, 第三类积分在该替换下化为

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

积分 (4)、(5) 及 (6) 也叫做*勒让德式第一类、第二类及第三类椭圆积分*.

其中特别重要的并常常用到的是前两种. 如果认为这两个积分在 $\varphi=0$ 时等于 0, 并由此定出其中任意常数的值, 则得到两个完全确定的 φ 的函数, 勒让德各表之以 $F(k,\varphi)$ 及 $E(k,\varphi)$. 这里除独立变量 φ 外还指出了一个函数式中的参变量 k, 叫做模.

勒让德给这些函数就种种 φ 及 k 值做出了大本的数值表. 其中不仅是可解释为角的自变量 φ 表成了度数, 模 k (它是一个真分数) 也看成了某一个角 θ 的正弦, 而在表里也就替代模的地位给出了该角的度数.

此外, 勒让德以及其他学者也深入地研究了这些函数的性质, 建立了一系列关于它们的公式等等. 因此, 勒让德函数 F 及 E 在解析及其应用中取得与初等函数同等的地位.

我们目前所学的积分学初等部分固然只限于 "有限形式的积分法", 但不要误认为积分学问题一般也限于此. 椭圆积分 F 及 E 正是这样的函数的例子: 它们虽不能以有限形式用初等函数表出, 但按其积分研究出丰富的结果并且有成功的应用.

第十一章　定积分

§1. 定积分定义及存在条件

175. 解决面积问题的另一途径　我们回到 **156** 段所讲过的曲线梯形面积定义问题 (图 65). 现在来讲这个问题的另一解法[①].

把曲线梯形 $ABCD$ 的底边 AB 任意分为若干段而在各分点上一一竖立相应纵坐标线; 如此该形被分成了一系列窄条 (见图 65).

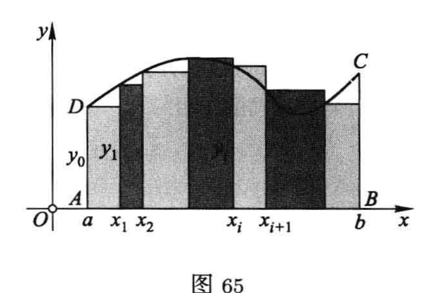


图 65

现在每一窄条都以一个矩形作其近似代表, 这矩形与该条同底, 其高则等于该条的纵坐标线之一, 比如说, 就取其最左边的纵坐标线. 如此, 该曲线梯形就被一个由矩形组成的阶梯样图形所替代.

各分点的横坐标表以

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

①在此推广了一个曾一度应用于特例的概念 [**43** 段, 3)].

第 i 个矩形的底显然等于 $x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$, 今后表以 Δx_i. 至于其高, 则按所说应等于 $y_i=f(x_i)$. 所以第 i 个矩形的面积是 $y_i\Delta x_i=f(x_i)\Delta x_i$.

把所有这些矩形的面积加起来, 我们就得出曲线梯形的面积 P 的近似值:

$$P\approx\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta x_i \quad \text{或} \quad P\approx\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i.$$

这等式的误差在所有 Δx_i 无限制变小时趋近于零. 于是面积 P 的精确值就是极限:

$$P=\lim\sum y_i\Delta x_i=\lim\sum f(x_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

此时假设所有 Δx_i 之长同时趋近于零.

同此方法可适用于计算图形 $AKLD$ (图 63) 的面积 $P(x)$, 只是在此要分段的是区间 AK. 我们还再声明一下, 当 $y=f(x)$ 取负值的情形, 也如 **156** 段那样约定把 x 轴下面那部分面积看作是负的.

总和 $\sum y\Delta x$ 的表示法 (严格地说, 这总和的极限值的表示法) 莱布尼茨也采用 $\int ydx$ 这样的符号, 这里 ydx 理解为该和的代表项, 而 $\int$ 是拉丁文 Summa 一字的第一个字母 S 的手写体.[①] 既然表示这个极限值的面积同时也就是 $f(x)$ 的原函数, 则原函数也就用同一符号来表示. 因此, 如果采用函数表示符号, 则变动面积就写成

$$\int f(x)dx,$$

而与 x 由 a 变至 b 相对应的固定图形 $ABCD$ 的面积, 就写成

$$\int_a^b f(x)dx.$$

为了能自然引出像 (2) 式那样的总和的极限, 我们利用了面积的直观概念, 而该极限在历史上也正是联系着面积计算问题产生的. 但是面积概念本身还有待严格建立; 并且, 如果对曲线梯形而言, 也正是要靠上述极限来建立. 当然, 我们应该先独立地研究极限 (2), 而不联系几何概念. 这就是本章所要讲的.

像 (2) 那样的极限在数学分析及其种种应用中占非常重要的地位. 而这里所发展的概念, 将以种种形式在全教程中屡次重复提到.

176. 定义 设有一函数 $f(x)$ 给定在某一区间 $[a,b]$ 上. 我们在 a 与 b 之间插入一些分点 (1), 而将该区间任意分为若干段. 今后以 λ 表示差数 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 中最大者.

在每个分区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 里各取一个任意的点 $x=\xi_i$[②].

$$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$$

① "积分" (源于拉丁文 integral, 即 "整" 的意思) 一词是莱布尼茨的学生及同事约翰 · 伯努利 (J. Bernoulli) 所提出; 莱布尼茨本来是说: "ydx 的总和".

②前面我们曾一律取最小值 x_i 作 ξ_i.

而做成总和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

现在我们来建立这个总和的 (有限) 极限概念:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma. \tag{3}$$

我们想象把区间 $[a, b]$ 逐次进行分割, 先按第一种方法来分, 然后按第二种方法来分, 又按第三种方法来分, 如此进行下去. 这种分割法的序列, 如果其相应序列 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ 趋于零, 则称为*主分割法序列*.

等式 (3) 我们理解为这样的意义: *相应于任何***主分割法序列的** σ *值序列, 不论此时* ξ_i *如何取法, 恒趋于一个极限* I.

这里也可以用 "$\varepsilon - \delta$ 语言" 来给该极限的定义. 也就是说, *如果对每个* $\varepsilon > 0$ *恒能找到这样一个* $\delta > 0$, *使得不论* ξ *如何取法, 在* $\lambda < \delta$ *时 (即在主分割法中* $\Delta x_i < \delta$) *恒有*

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

则称总和 σ *在* $\lambda \to 0$ *时有一极限* I.

这两个定义的等价性可以用与 **33** 段中相同的想法来证明. 第一个用 "序列语言" 的定义可以把极限论基本概念及命题也搬到这种新型极限上来.

总和 σ *在* $\lambda \to 0$ *时的有限极限* I *就叫做函数* $f(x)$ *在由* a *至* b *这区间里的***定积分**, 并表之以符号①

$$I = \int_a^b f(x)dx; \tag{4}$$

如果这样的极限存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 里是*可积分的*.

a 与 b 二数分别称为积分的*下限*与*上限*. 在上下限均为常数时定积分也就是一个常数.

这个一般的定义属于黎曼, 他最先以一般形式陈述出来并研究了其应用范围. 总和 σ 本身有时也就被称为*黎曼和*, 虽然这样的和的极限早经柯西明白采用于连续函数的情形. 我们为了强调其与积分的关系宁可称之为*积分和*.

现在我们来阐明这个问题: 在什么条件之下积分和 σ 有有限的极限, 也就是说, 在什么条件之下定积分 (4) 存在.

首先我们要注意, 上述定义其实只能适用于*有界的*函数. 事实上, 如果一个函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是无界的, 则在任何分割法之下总至少有一个分区间里该函数

①这个定积分写法是法国数学家和物理学家傅里叶 (J. B. J. Fourier, 1768—1830) 所创拟的. 欧拉 (Euler) 的写法则比较繁琐:

$$\int P dx \begin{bmatrix} \text{由 } x = a \\ \text{至 } x = b \end{bmatrix}.$$

保持无界这个性质. 于是在这分区间里依靠 ξ 的选择总可以使 $f(\xi)$ 连同总和 σ 大到任何所要的程度; 在这情形之下显然 σ 的有限极限是不能存在的. 所以, *可积分的函数必须是有界的*.

因此以后我们一律预先假设所研究的函数 $f(x)$ 是有界的:

$$\text{如果 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 则 } m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

177. 达布和 作为一种辅助的研究工具, 我们除积分和以外还来考虑像达布[①]和以及其他类似而较简单的和.

我们以 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的下确界及上确界并且做成总和

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

这两个和就分别称为下 (*积分*) *和*及上 (*积分*) *和*, 或*达布和*.

在特例, 当 $f(x)$ 连续时, 这些和就直接是相应于任一分割法的积分和的最小者及最大者, 因为在这情形函数 $f(x)$ 在每一区间里都达到其上下确界, 而点 ξ_i 可以 (按要求) 取得使

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{或} \quad f(\xi_i) = M_i.$$

转到一般情形, 由上下界定义本身我们有

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i.$$

将这些不等式逐项各乘以 Δx_i (Δx_i 是正数) 并依 i 求其总和, 我们得到

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

在固定的分割法之下总和 s 及 S 都成常数, 而此时总和 σ 则仍保持为变量, 因为 ξ_i 是任意的数. 但容易看出, 依靠 ξ_i 的选择, $f(\xi_i)$ 的值可使随意接近于 m_i, 也可随意接近于 M_i, 这就是说, 总和 σ 可使随意接近于 s 或 S. 于是上面的不等式导出下面这句已经很一般的话: *在给定的分割法之下, 达布总和 s 及 S 分别可作为积分和的下确界及上确界*.

达布总和具有下列简单性质:

第一性质 *如果在一组现有的分点上添加一些新的点, 则达布下和只能因此有增无减, 其上和只能有减无增*.

证明 要证明这个性质, 只要在现有分点中再添加一个分点 x' 就够了.

设此点落在 x_k 与 x_{k+1} 之间:

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

①达布 (G. Darboux, 1842—1917) 是一位法国数学家.

如果以 S' 表示新的上和, 则它与旧和 S 的差别只在这里: 旧和 S 中相应于区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的是

$$M_k(x_{k+1} - x_k)$$

这一项, 而在新和 S' 中则相应于该区间的有两项

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x'),$$

这里 $\overline{M}_k$ 及 $\overline{\overline{M}}_k$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_k, x']$ 及 $[x', x_{k+1}]$ 中的上确界. 既然这两个区间都是区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的一部分, 则

$$\overline{M}_k \leqslant M_k, \quad \overline{\overline{M}}_k \leqslant M_k,$$

从而

$$\overline{M}_k(x' - x_k) \leqslant M_k(x' - x_k), \quad \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \leqslant M_k(x_{k+1} - x').$$

把这两个不等式两边加起来, 得

$$\overline{M}_k(x' - x_k) + \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1} - x') \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k).$$

由此就推出, $S' \leqslant S$. 对于下和证明法与此相似.

第二性质 *每个达布下和, 无论其相应于怎样的分割法, 都不大于每个上和.*

证明 我们把区间 $[a, b]$ 任意分为一组分区间并对此分割法做出相应的达布和

$$s_1 \quad 及 \quad S_1. \tag{I}$$

现在我们考虑区间 $[a, b]$ 的另一个与前面那个毫无联系的分割法. 它也有其一个相应的达布和

$$s_2 \quad 及 \quad S_2. \tag{II}$$

要来证明, $s_1 \leqslant S_2$. 为此我们把两个分割法的分点合并在一起; 于是得出第三个辅助的分割法, 它相应于达布和

$$s_3 \quad 及 \quad S_3. \tag{III}$$

这第三个分割法是由第一个*添加新分点*得出的; 所以, 根据所证明达布和的第一性质我们有

$$s_1 \leqslant s_3.$$

现在对比第二与第三分割法可同样得出结论:

$$S_3 \leqslant S_2.$$

但 $s_3 \leqslant S_3$, 所以由刚才得到的不等式从而有

$$s_1 \leqslant S_2,$$

这就是所要证明的.

由所证明的推知, 全体下和的集合 $\{s\}$ 是上方有界的, 例如任何上和 S 就是它的一个上界. 在这种情形 (参看第 **6** 段) 该集合有一个上确界

$$I_* = \sup\{s\}$$

并且不论对哪个上和 S 恒有

$$I_* \leqslant S,$$

如此, 上和的集合既然以 I_* 为一下界, 则它有一个下确界

$$I^* = \inf\{S\},$$

而显然

$$I_* \leqslant I^*.$$

总之, 对任何达布下和及上和我们恒有

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S. \tag{5}$$

178. 积分存在条件 有了达布和的帮助, 我们现在就容易陈述这个条件了.

定理 *要定积分存在, 必要且充分条件是*

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0. \tag{6}$$

176 段所说的足以阐明这个极限的意义. 例如, 用 "$\varepsilon - \delta$ 语言" 来说, 条件 (6) 就表示, 对任何 $\varepsilon > 0$ 恒可找到一个这样的 $\delta > 0$, 使得在 $\lambda < \delta$ 时 (即将区间分为长度 $\Delta x_i < \delta$ 的部分时) 恒成立不等式

$$S - s < \varepsilon.$$

证明 **必要性** 我们假设积分 (4) 存在. 于是依据任何给定的 $\varepsilon > 0$ 来找一个这样的 $\delta > 0$, 只要所有 $\Delta x_i < \delta$, 立即就有

$$|\sigma - I| < \varepsilon \quad 或 \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

不论 ξ_i 在相应分区间内怎样选取. 但我们已经证明, 总和 s 及 S 在给定的分割法之下分别为积分和之下确界及上确界; 所以我们有

$$I - \varepsilon \leqslant s \leqslant S \leqslant I + \varepsilon,$$

如此

$$\lim_{\lambda\to 0} s = I, \quad \lim_{\lambda\to 0} S = I, \tag{7}$$

由此从而有 (6).

充分性 我们假设条件 (6) 已实现; 于是由 (5) 显然有 $I_* = I^*$, 并且如果以 I 表其共同值则

$$s \leqslant I \leqslant S. \tag{5*}$$

如果 σ 理解为与 s 及 S 相应于同一分割法的积分和值之一, 则我们知道有

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

按条件 (6), 如令所有 Δx_i 充分地小, 则 s 与 S 之差将小于任意取定的 $\varepsilon > 0$. 但在这情形这句话对于介于它们之间的数 σ 及 I 也是成立的:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

如此 I 是 σ 的极限, 也即为定积分.

如果 ω_i 表示函数在第 i 分区间里的振幅 $M_i - m_i$, 则我们将有

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i,$$

而定积分存在条件可写成这样:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i = 0. \tag{8}$$

这也就是通常所应用的形式.

179. 可积函数类别 应用所求得的检验法, 我们可以来确定几类可积分的函数.

I. *若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中连续, 则该函数必可积分.*

证明 既然函数 $f(x)$ 连续, 则根据康托尔定理的推论 [**75** 段] 对任何给定的 $\varepsilon > 0$ 总可以找到这样一个 $\delta > 0$, 使得在区间 $[a, b]$ 分为长度 $\Delta x_i < \delta$ 的小区间时, 所有 $\omega_i < \varepsilon$. 由此有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

因为 $b - a$ 是常数而 ε 可任意地小, 则条件 (8) 已实现, 故积分存在. 所证明的这句话还可稍加推广如下.

II. *一个在 $[a, b]$ 中有界的函数 $f(x)$ 若只有有限个间断点, 则必可积分.*

证明 我们不妨限于 a 与 b 间只含一个间断点 x' 的情形 (图 66). 取任一 $\varepsilon > 0$. 以邻域 $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ 将点 x' 围起来. 在其余两闭区间里函数 $f(x)$ 就成连续的了, 而我们可在每个里面分别应用康托尔定理的推论. 依 ε 所得到的两个 δ 中我们取其较小的一个 (不妨也就以 δ 表之). 于是它将同时适用于上述两个区间. 我们当然不妨取 $\delta < \varepsilon$. 于是将区间 $[a,b]$ 任意分为小区间, 而使其长 Δx_i 全都小于 δ. 所得分区间将成这样两类:

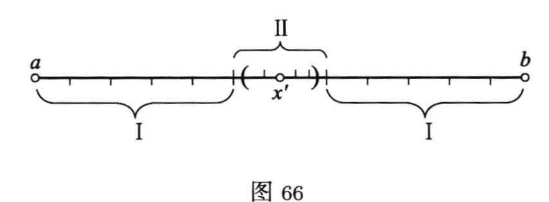


图 66

I) 整个区间都落在所分出的断点邻域之外. 在这种区间里函数的振幅 $\omega_i < \varepsilon$;

II) 整个区间都落在所分出邻域之内, 或一部分进入该邻域.

既然函数 $f(x)$ 假设是有界的, 则在任何分区间里其振幅不会超过全区间 $[a,b]$ 中的振幅 Ω.

我们将总和

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

分为两个:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{及} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

每个分别分布在第一类及第二类区间上.

对于第一个和, 也如在前定理中一样, 我们将有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b-a).$$

至于第二个和, 则我们注意第二类完全落在该邻域内的区间之长在总和中小于或等于 2ε; 部分进入该邻域的区间则至多只有两个, 而其长度之和小于 2δ, 也即远小于 2ε. 所以,

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 4\varepsilon.$$

如此, 我们终于在 $\Delta x_i < \delta$ 之下有:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon[(b-a) + 4\Omega].$$

既然方括号内是个常数而 ε 可任意地小, 这就证明了我们的命题.

最后我们指出一类简单的可积函数, 未包含在前两类之内.

III. 任何单调函数 $f(x)$ 必可积分.

证明 设 $f(x)$ 是一个单调增函数. 于是它在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的振幅为

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

给定任一 $\varepsilon > 0$ 而令

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

只要 $\Delta x_i < \delta$, 我们就有

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon,$$

由此可见该函数是可积分的.

注 可积函数在有限个点 (k 个点) 上的函数值变化不影响积分的存在, 也不影响积分的值.

既然这种变化至多只牵涉到总和 $\sum \omega_i \Delta x_i$ 的 k 项, 则在 $\lambda \to 0$ 时该和将仍然趋于 0. 至于积分的值, 则对于原来的函数及变化后的函数我们选择点 ξ_i 时, 总可避开那些函数值不同之点.

§2. 定积分性质

180. 依有向区间的积分 以前我们说 "在由 a 至 b 区间上的定积分" 时总指的是 $a < b$ 的情形. 现在我们来消除这个限制.

因此我们先来建立有向区间的概念. 所谓有向区间 $[a, b]$ (这里可以 $a < b$ 也可以 $a > b$) 我们指的是分别满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b \quad 或 \quad a \geqslant x \geqslant b$$

的 x 值的集合, 而次序是由 a 至 b, 即在 $a < b$ 时取**增序**或 $a > b$ 时取**减序**. 如此区间 $[a, b]$ 与 $[b, a]$ 我们看作是有区别的: 成分相同 (看作数的集合) 而方向有别.

在 **176** 段里所给的积分定义可以说只对有向区间 $[a, b]$ 在 $a < b$ 的情形而言.

现在我们来考虑在 $a > b$ 这假设之下有向区间 $[a, b]$ 上的积分定义. 在这情形仍可重复寻常的区间分割手续而依 a 至 b 的方向插入分点:

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots > x_n = b.$$

在每个分区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 里各取一点 ξ_i, 使 $x_i \geqslant \xi_i \geqslant x_{i+1}$, 而做成积分和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

这里这次所有 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$. 最后, 这个和的极限导出这个积分的概念

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

如果对区间 $[a,b]$ 和 $[b,a]$ (这里 $a \gtrless b$) 取相同的分点及相同的 ξ 点, 则其相应积分和将只差一个正负号. 由此取极限而得这样的命题:

1° 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 里可积分, 则它在区间 $[b,a]$ 里也可积分而

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

但是, 这个等式也就可以取作 $a > b$ 时积分 $\int_a^b$ 的定义, 只要此时积分 $\int_b^a$ 存在.

我们还指出, 作为定义设

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

181. 可用等式表出的性质 我们再列举一些可用等式表出的定积分性质①.

2° 设 $f(x)$ 在 $[a,b], [a,c], [c,b]$②诸区间最大的一个里可积分, 则它在其余两个区间里也就可积分, 并成立等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

不论 a, b, c 三点的相互位置如何.

证明 我们不妨先假设 $a < c < b$ 而函数在区间 $[a,b]$ 里可积分.

我们考虑区间 $[a,b]$ 的一种分割法而点 c 看作其中分点之一. 于是我们首先有

$$\sum_a^b \omega\Delta x = \sum_a^c \omega\Delta x + \sum_c^b \omega\Delta x^{③},$$

并且 —— 有鉴于所有的项都是正的 —— 由左边的和趋于 0 从而右边的和也趋于 0, 如此函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 里的可积分性就证明了. 现在显然

$$\sum_a^b f(\xi)\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\Delta x.$$

①今后 (如无特别声明) 凡积分 $\int_a^b$ 均认为可能有 $a < b$ 及 $a > b$ 两种情形.

②这假设也可代之以 “函数 $f(x)$ 在两个较小的区间里都可积分”. 这时候它在较大的一个区间里也就可积分.

③这表示法的意义不待解释当可自明.

取 $\lambda \to 0$ 时的极限, 我们就得出所要求的等式.

点 a, b, c 的其他布列情形都可化为这种情形. 例如, 设 $b < a < c$ 而函数 $f(x)$ 在区间 $[c, b]$ 里可积分或 (按 1° 这是一样的) 在区间 $[b, c]$ 里可积分. 在这情形根据所证明的我们将有

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

由此将第一第二积分移至等式另一边而 (根据性质 1°) 对调积分限即仍化为前面那个关系式.

3° 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 里可积分, 则 $k \cdot f(x)$ 也在此区间里可积分, 而

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

4° 如果 $f(x)$ 及 $g(x)$ 同在区间 $[a, b]$ 内可积分, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也在此区间内可积分, 而

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

这两条性质的证明法相似, 都只要在积分和里取极限就行了. 例如我们来证明后一条.

将区间 $[a, b]$ 任意分为若干小区间并做出所有三个积分的积分和, 此时点 ξ_i 在每个分区间里都是任意选取的, 但对所有三个积分和都采取同一套 ξ_i; 于是我们有

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\Delta x_i.$$

现在设 $\lambda \to 0$; 既然对右边两个和极限存在, 则对左边的和极限也存在, 这就证明了 $f(x) \pm g(x)$ 是可积分的. 在该等式中取极限, 就导出所要求的关系式.

182. 可用不等式表出的性质 至今为止我们考虑的都是可用等式表出的积分性质; 现在来考虑用不等式表出的性质.

5° 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内可积分, 并且无负值而 $a < b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

证明是显然的.

由此 (及 4°) 可得出简单的推论:

6° 如果两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内可积分, 并且恒有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则在假设 $a < b$ 之下也有

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

只要应用前一性质于 $g(x) - f(x)$ 就行了.

7° 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内可积分且 $a<b$; 于是函数 $|f(x)|$ 在此区间内也可积分并且有不等式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

我们首先来证明 $|f(x)|$ 的积分是存在的. 如果在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 里取任意两点 x' 及 x'', 则 [第 **8** 段]

$$\|f(x'')| - |f(x')\| \leqslant |f(x'') - f(x')|.$$

所以, 如果用 ω_i^* 表示函数 $|f(x)|$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 里的振幅, 则按振幅的定义 [第 **73** 段] 我们将有 $\omega_i^* \leqslant \omega_i$, 如此

$$0 \leqslant \sum \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i,\text{①}$$

而右边的和趋于 0 时左边的也就跟着趋于 0.

所要证明的不等式就容易这样得出: 只要由积分和

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i)|\Delta x_i\text{②}$$

出发而令其趋于极限就可以了.

8° 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 内可积分, 并且在这整个区间内成立不等式

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

可应用性质 6° 于函数 $m, f(x)$ 及 M, 但更简单是直接用这个明显的不等式

$$m\sum \Delta x_i \leqslant \sum f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\sum \Delta x_i$$

而令其趋于极限.

所证明的不等式也可赋以适当的等式形式, 同时还可免除 $a<b$ 的限制.

9° **中值定理** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a \lesseqgtr b)$ 内可积分并设在此全区间内 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

这里 $m \leqslant \mu \leqslant M$.

---

①既然 $a<b$, 则所有 $\Delta x_i > 0$.

②同上.

证明 如果 $a<b$, 则按性质 8° 我们有

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

令

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu,$$

即得所求等式.

对 $a>b$ 的情形我们可对 $\int_b^a$ 进行同样的考虑, 然后取极限而得到前面的公式.

刚才所证明的公式当函数 $f(x)$ 连续时可成特别简单的形式. 事实上, 如果把 m 及 M 看作是该函数按魏尔斯特拉斯定理 [第 **73** 段] 所实现的最小值及最大值, 则按波尔查诺 – 柯西定理 [第 **70** 段], 函数 $f(x)$ 应在区间 $[a,b]$ 内某一点 c 上取得中间值 μ. 如此

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c),$$

这里 c 属于 $[a,b]$.

这个公式的几何意义是明显的. 设 $f(x) \geqslant 0$. 我们来看曲线 $y=f(x)$ 下的曲线图形 $ABCD$ (图 67). 此时曲线图形的面积 (可用定积分表出) 等于这样一个矩形的面积, 这矩形与曲线图形同底而以某一中间纵坐标线 LM 为高.

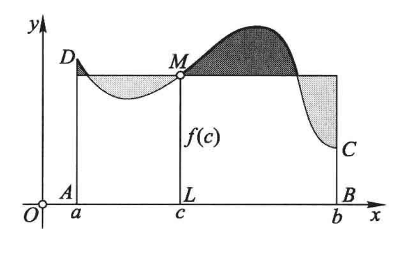


图 67

10° **中值定理的推广** 设 1) $g(x)$ 及乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内可积分; 2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$; 3) $g(x)$ 在全区间里不变正负号: $g(x)\geqslant 0$ $[g(x)\leqslant 0]$. 于是

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx,$$

这里 $m \leqslant \mu \leqslant M$.

证明 先设 $g(x)\geqslant 0$ 并且 $a<b$; 于是我们有

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

由这不等式, 我们根据性质 6° 及 3° 得到

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

由关于函数 $g(x)$ 的假设及性质 5° 我们有

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0.$$

如果这个积分等于 0, 则由前面的不等式显然同时也有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

而本定理显然成立. 如果该积分大于 0, 则用它遍除上面所得的双重不等式而令

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} = \mu,$$

如此导出所求结果.

其实 $a < b$ 及 $g(x) \geqslant 0$ 这限制并不需要: 对换积分限或改变 $g(x)$ 的正负号并不破坏等式.

如果 $f(x)$ 连续, 则这个公式可以写成这样:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx,$$

这里 c 属于 $[a,b]$.

注 我们经常用字母 x 表示积分变量; 但是, 如果我们用任何别的字母替代 x, 只要保持积分限 a 和 b 及被积函数 f, 当然还是没有影响. 符号 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b f(t)dt$ 或 $\int_a^b f(z)dz$ 等等都表示同一个数. 这个明显的笺注我们马上就要用到.

183. 定积分作为上限的函数 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ $(a \gtrless b)$ 内可积分, 则 [**181** 段, 2°] 它在区间 $[a,x]$ 内也可积分, 这里 x 是 $[a,b]$ 中的任一个值. 以变量 x 替代定积分上限 b 我们得到

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,^{①} \tag{1}$$

它显然是 x 的函数. 这函数具有下列性质:

11° 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可积分, 则 $\Phi(x)$ 在该区间内为 x 的连续函数.

①我们在此以 t 表示积分变量, 是为了避免与上限相混.

证明 赋予 x 以任一增量 $\Delta x = h$, 只要 $x+h$ 不越出所考虑的区间之外, 如此我们得到函数 (1) 的一个新值

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x+\int_x^{x+h}$$

[参看 2°] 而

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

对这个积分应用中值定理 9°:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h; \tag{2}$$

这里 μ 介于函数 $f(x)$ 在区间 $[x, x+h]$ 内的确界 m' 与 M' 之间, 所以更不成问题也介于它在区间 $[a, b]$ 内的 (常数) 下界 m 与上界 M 之间[①].

现在如果让 h 趋于 0, 则显然

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0 \quad 或 \quad \Phi(x+h)\to\Phi(x),$$

这就证明了函数 $\Phi(x)$ 是连续的.

12° 如果函数 $f(t)$ 在点 $t=x$ 连续, 则在此点函数 $\Phi(x)$ 有导数, 等于

$$\Phi'(x)=f(x)^{②}.$$

证明 事实上, 由 (2) 我们有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu, \quad 这里 \quad m'\leqslant\mu\leqslant M'.$$

但既然函数 $f(t)$ 在 $t=x$ 时连续, 则对任一 $\varepsilon>0$ 可找到这样一个 $\delta>0$, 使 $|h|<\delta$ 时对区间 $[x, x+h]$ 内一切 t 值恒有

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon.$$

在这情形, 也成立不等式 [**6** 段]

$$f(x)-\varepsilon\leqslant m'\leqslant M'\leqslant f(x)+\varepsilon,$$

如此也就有

$$f(x)-\varepsilon\leqslant\mu\leqslant f(x)+\varepsilon \quad 或 \quad |\mu-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

现在显然

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\mu=f(x),$$

这就是所求证的.

---

①要记得可积分函数是有界的 [第 **176** 段].

②这个重要命题 —— 对在全区间内连续的函数 —— 最先经柯西严密证明 (1823 年). 如果回忆一下定积分的面积几何解释 [**175** 段], 则定理 12° 可与所谓牛顿 – 莱布尼茨定理等同 [**156** 段].

我们得出了一个具有重大原则性及实用意义的结论. 如果假设函数 $f(x)$ 在全区间 $[a, b]$ 内连续, 则它必可积分 [**179** 段, I] 并且前面的论断可适用于这区间的任何一点 x 上: 积分 (1) 对上限 x 的导数处处都等于被积函数在该点上的函数值 $f(x)$.

换句话说, 在区间 $[a, b]$ 里**连续的**函数 $f(x)$ 总是有**原函数**的; 它的一个例子就是具变上限的定积分 (1).

如此, 我们终于建立了那个在 **156** 段已提到过的命题.

特别是, 我们现在能把勒让德函数 F 及 E [**174** 段] 写成定积分的形式:

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

按刚才所证明的, 它们分别为函数

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

的原函数并且在 $\varphi = 0$ 时等于 0.

注 本段所证明的论断容易推广到下限是变量的情形, 因为由 1° 有

$$\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt.$$

这个积分对 x 的导数显然等于 $-f(x)$, 只要 x 是连续点.

§3. 定积分的计算及变换

184. 用积分和的计算 我们举例按定积分定义直接由积分和来计算定积分. 预先知道连续函数的积分是存在的, 于是我们可以专为便利着想来选择分割法和点 ξ.

1) $\int_a^b \sin x dx$. 把区间 $[a, b]$ 分为相等的 n 段而设 $h = \frac{b - a}{n}$; 函数 $\sin x$ 的值在 $a < b$ 时我们算它在每分区间的*右*端之值, $a > b$ 时则算它在*左*端之值. 于是

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih).$$

我们来给右边的和找一个简单的表达式. 以 $2 \sin \frac{h}{2}$ 乘除之, 然后将每项都表为余弦之差, 如此不难得出:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih) &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2 \sin(a + ih) \sin \frac{h}{2} \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=1}^{n} \left[\cos\left(a + ih - \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + ih + \frac{1}{2}h\right)\right] \\
&= \frac{\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + nh + \frac{1}{2}h\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}.
\end{aligned} \tag{1}$$

如此

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right].$$

既然 $n\to\infty$ 时 $h\to 0$, 则

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a - \cos b.$$

2) $\int_a^b x^\mu dx$ $(b>a>0, \mu$ 为任意实数).

这次我们把区间 $[a,b]$ 分为不相等的部分, 即在 a 与 b 之间插入 $n-1$ 个几何中项. 换句话说, 设

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

而来考虑这个几何级数

$$a, aq, \cdots, aq^i, \cdots, aq^n = b.$$

我们注意, 在 $n\to\infty$ 时公比 $q=q_n\to 1$, 差数 $aq^{i+1}-aq^i$ 则小于 $b(q-1)\to 0$.

就左端算出函数值, 如此我们有

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^\mu(aq^{i+1}-aq^i) = a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^{\mu+1})^i.$$

先假设 $\mu\neq -1$; 于是

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1} = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1},$$

并且利用已知的极限 [**65** 段, 3)], 我们得出

$$\int_a^b x^\mu dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

在 $\mu=-1$ 的情形则

$$\sigma_n = n(q_n-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right),$$

并且根据另一已知结果 [**65** 段, 2)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right) = \ln b - \ln a.$$

185. 积分学基本公式 我们在 **183** 段已经看到, 对于在区间 $[a, b]$ 里连续的函数 $f(x)$, 积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是它的一个原函数. 如果 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个任意的原函数 [例如用前章 §1—4 的方法所找到的], 则 [**155** 段]

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

常数 C 只要在此让 $x = a$ 就容易定出, 因为 $\Phi(a) = 0$; 我们有

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \quad \text{由此得} \quad C = -F(a).$$

终于得出

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

特例, 在 $x = b$ 时我们得到

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{A}$$

这就是所谓*积分学基本公式*[①].

如此, **定积分**的*值可表为任一原函数在* $x = b$ *及* $x = a$ *时两值之差*.

公式 (A) 给我们一种有效的方法来计算连续函数 $f(x)$ 的定积分. 要知道对于许多类这种简单函数我们会将其原函数以有限形式用初等函数表出. 在这些情形定积分就可直接用该基本公式算出. 公式右边之差通常也以符号 $F(x)|_a^b$ 来表示 (所谓"由 a 至 b 的二次代入") 而该公式可写成这样:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{A*}$$

例如, 这样我们立即可以找出:

1) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$

2) $\displaystyle\int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$

3) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a > 0, b > 0).$

这些结果在前一段里是很费点力气才得出来的.

[①] 这里的演证完全与 **156** 段计算函数 $P(x)$ 及面积 P 时所用的相似. 公式 (A) 本身也就容易由对比 **156** 段及 **175** 段的结果而得出.

186. 定积分中变量替换公式 基本公式 (A) 还能给我们建立定积分号下变量替换的法则.

设要计算积分 $\int_a^b f(x)dx$, 这里 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 内连续的. 令 $x=\varphi(t)$, 这函数 $\varphi(t)$ 具备下列条件:

1) 函数 $\varphi(t)$ 在某一区间 $[\alpha,\beta]$ 内有定义且连续, 而其值当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 内变化时恒不越出区间 $[a,b]$[①]的范围;

2) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$;

3) 在区间 $[\alpha,\beta]$ 有一连续导函数 $\varphi'(t)$.

于是成立公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

由于被积函数假设是连续的, 不但这些定积分存在, 同时其相应不定积分也存在, 并且在两情形都可以用基本公式. 但如果 $F(x)$ 是微分 $f(x)dx$ 的原函数之一, 则函数 $\Phi(t)=F(\varphi(t))$, 我们知道, 就是微分 $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ 的原函数 [参看 **160** 段]. 所以我们同时有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

及

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt&=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\&=F(b)-F(a),\end{aligned}$$

由此得出所求证的等式.

注 我们指出公式 (2) 的一个重要特点. 在用变量替换法计算不定积分时, 得出所求的函数是以变量 t 表出的, 我们还须还原为旧变量 x, 而在这里就不必这样了. 如果定积分 (2) 中第二个 (它是一个数) 已经算出, 则同时第一个也就算出来了.

例 1) 用替换 $x=a\sin t$ 求积分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$; α 与 β 在这里就是 0 与 $\frac{\pi}{2}$. 我们有

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

[参看 **160** 段].

2) 我们来看积分

$$\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi.$$

---

① 函数 $f(x)$ 有时可以在比 $[a,b]$ 大的区间 $[A,B]$ 里有定义并连续, 在这时候只要 $\varphi(t)$ 的值不越出区间 $[A,B]$ 的范围就行了.

最后一积分由替换 $x=\pi-t\left(t \text{ 由 } \frac{\pi}{2} \text{ 变至 } 0\right)$ 化为

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

并表为这样两积分之差的形式:

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

代入化简后得:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

187. 定积分的分部积分法 我们在 **162** 段有了一个分部积分的公式

$$\int udv=uv-\int vdu, \tag{3}$$

这里假设以 x 为自变量的函数 u,v 以及其导函数 u',v' 都是在所考虑区间 $[a,b]$ 里连续的. 现在我们利用同一基本公式 (A) 把公式 (3) 变为定积分中的类似公式, 借此可将一个定积分的计算化为另一个 (一般较为简单的) 定积分的计算.

以 $\varphi(x)$ 表示公式 (3) 中后一个积分. 于是按公式 (A) 有

$$\int_a^b udv=[uv-\varphi(x)]\Big|_a^b=uv\Big|_a^b-\varphi(x)\Big|_a^b.$$

既然由 (A) 同时也有

$$\int_a^b vdu=\varphi(x)\Big|_a^b,$$

则我们终于得出这个公式:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu. \tag{4}$$

这个表示数之间关系的公式 (4) 原则上要比里面有函数的公式 (3) 简单些; 它在二次代入等于 0 时尤为便利.

例 计算积分

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx,\quad J'_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m xdx,$$

这里 m 是自然数.

分部积分, 得

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}xd(-\cos x)=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 xdx.$$

二次代入化为零. 以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$, 得

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

由此导出这个递推公式:

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2},$$

它把积分 J_m 逐步归结到 J_0 或 J_1. 即, 在 $m=2n$ 时我们有:

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$m=2n+1$ 时则

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}.$$

和 J'_m 也可得出完全相同的结果①.

为了将所得诸式写得简单一点, 我们建议一个符号 $m!!$, 它表示不超过 m 的自然数的"二进阶乘" (例如, $6!!=2\cdot 4\cdot 6$, 而 $7!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$). 于是可写

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为偶数,} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m\text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{5}$$

188. 沃利斯公式 由公式 (5) 容易推出著名的沃利斯公式, 沃利斯于 1655 年在其《无穷算术》中刊布.

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 我们有不等式

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

将此不等式由 0 至 $\frac{\pi}{2}$ 积分起来:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx.$$

由此按 (5) 得

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

或

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

既然两端二式之差

$$\frac{1}{(2n+1)2n}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

显然, 在 $n\to\infty$ 时趋于 0, 则 $\frac{\pi}{2}$ 为其共同极限. 如此,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}$$

①用替换 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 可将 J'_m 化为 J_m.

或

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ \cdots\ \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

这就是沃利斯公式①. 它具历史意义, 第一个将 π 表为容易计算的有理式极限的形式. 在理论的研究上我们至今仍用到它. 但对 π 值的近似计算现在已有快速得多的方法.

§4. 积分的近似计算

189. 梯形公式 设要计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$, 这里 $f(x)$ 是一个给定在区间 $[a,b]$ 里的连续函数. 在 §3 我们借助原函数按公式 (A) 很轻便地计算过这类积分. 但原函数只有在少数类型的函数是能表为有限形式的; 此外通常就只好诉诸种种近似计算法了. 这些方法将积分近似地用被积函数在一系列自变量值上的函数值表出. 在简单的情形要得出这种近似表达式可以借助几何想法较为省力; 既然定积分可解释为曲线 $y=f(x)$ 所包的 "曲线梯形" $ABCD$ (图 68) 的面积 [**175** 段], 我们的问题就化为这种面积的近似计算.

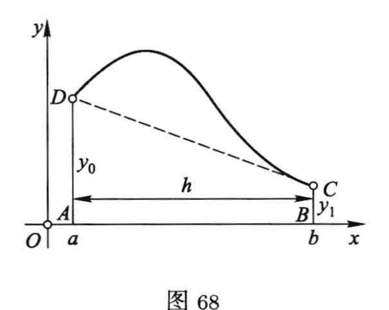


图 68

首先是, 我们自然想到把曲线弧 CD 以其弦来替代, 而曲线梯形也就被寻常的梯形所替代. 要决定这寻常梯形的面积只要知道起讫纵坐标线

$$f(a)=y_0,\quad f(b)=y_1$$

及底 $b-a=h$ 就行了. 如此我们得出近似公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{h}{2}(y_0+y_1).\tag{1}$$

当然, 这个公式只能给出很粗的近似值. 要得出较精确公式, 我们把区间 $[a,b]$ 以 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 诸点分为 n 个相等的小区间

$$[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},b],\tag{2}$$

① 原来的公式是对 $\frac{4}{\pi}$ 给出的.

并通过所取各分点作相应纵坐标线; 它们把原图形分为 n 条, 每条我们近似地代之以一个寻常的梯形, 就如刚才对原图形所做的一样 (图 69).

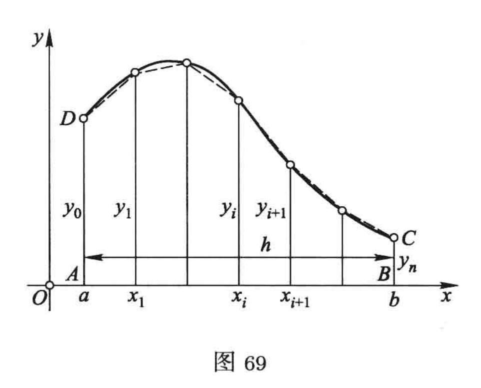


图 69

既然所有梯形之高都等于 $\frac{h}{n}$, 则令

$$f(a)=y_0,\quad f(x_1)=y_1,\cdots,\quad f(x_{n-1})=y_{n-1},\quad f(b)=y_n,$$

而各梯形面积将依次为

$$\frac{h}{2n}(y_0+y_1),\quad \frac{h}{2n}(y_1+y_2),\cdots\quad ,\frac{h}{2n}(y_{n-1}+y_n).$$

加起来就得出这个近似公式:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}\right]. \tag{3}$$

这就是所谓梯形公式.

在 n 无限增大时这梯形公式的误差从而无限减少. 如此, 只要 n 充分大, 由这个公式所产生的积分值可以达到任意的精确程度.

我们取这个已知的积分为例:

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0.785398\cdots,$$

对它应用所导出的近似公式, 取 $n=10$ 而计算到四位数字.

按梯形公式我们有

$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1.0000$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9901$
$x_{10} = 1.0$	$y_{10} = 0.5000$	$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0.9615$
	和 1.5000	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 0.9174$
$\frac{1}{10}\left(\frac{1.5000}{2} + 7.0998\right)$	$= 0.78498$	$x_4 = 0.4$	$y_4 = 0.8621$
		$x_5 = 0.5$	$y_5 = 0.8000$
		$x_6 = 0.6$	$y_6 = 0.7353$
		$x_7 = 0.7$	$y_7 = 0.6711$
		$x_8 = 0.8$	$y_8 = 0.6098$
		$x_9 = 0.9$	$y_9 = 0.5525$
			和 7.0998

所得近似结果较真值小 0.0005.

读者当然理解, 我们在此能估计出误差来只是因为预先知道了积分的精确数值. 要我们的公式能事实上适用于近似计算, 则须有方便的误差表达式. 它不但要能在已知的 n 值之下估计误差, 还要能在保证所要求的精确度之下选择 n 值. 这问题将在 **191** 段里再讨论.

190. 抛物线公式 我们仍回到曲线形 $ABCD$ 而将其底边 AB 平分于点 E 并作相应的纵坐标线 EF (图 70). 纵坐标线

$$AD = y_0,$$
$$EF = y_{\frac{1}{2}},$$
$$BC = y_1$$

及底边 $AB = h$ 都假设是已知的. 这次弦 CF 及 FD 则近似地代以抛物线弧 CD (抛物线轴成竖直方向), 通过三点 C, F, D —— 希望这抛物线比折线 CFD 能更近似地代表原曲线.

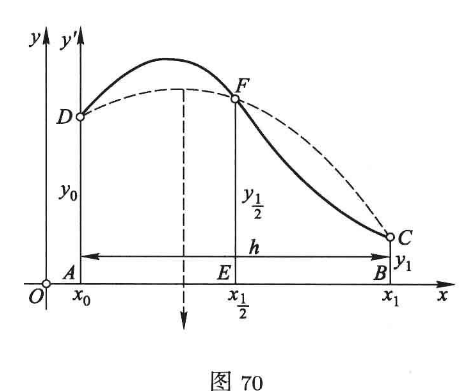


图 70

当然, 首先要明确通过平面上任意三点

$$(x_0, y_0), \quad (x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}), \quad (x_1, y_1) \quad (x_0 < x_{\frac{1}{2}} < x_1).$$

事实上总能画一条这样的抛物线, 并且只有一条. 具有竖直轴的抛物线的方程如下:

$$y = ax^2 + bx + c;$$

其系数可唯一地由三个条件

$$ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \quad ax_{\frac{1}{2}}^2 + bx_{\frac{1}{2}} + c = y_{\frac{1}{2}},$$
$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$

所决定, 因为这方程组的行列式 ("范德蒙德行列式")

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_{\frac{1}{2}}^2 & x_{\frac{1}{2}} & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

不等于零①.

现在我们来计算这个上面由抛物线弧所围的图形的面积 P. 我们将证明, 这个面积由公式

$$P = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1) \tag{4}$$

所表出; 它通常称为辛普森公式②.

不失一般性, 可以认为 y 轴就通过点 A. 于是

$$P = \int_0^h (ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

如果算出

$$y_0 = c, \quad y_{\frac{1}{2}} = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c, \quad y_1 = ah^2 + bh + c,$$

则辛普森公式立即可以验证.

那给出抛物线下面积精确值的 (4) 式只近似地代表所求的曲线 $y = f(x)$ 下面积:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1). \tag{5}$$

为了提高精确性我们和前面做法一样: 先把区间 $[a, b]$ 分为相等的 n 部分 (1), 而该图形分为 n 条, 对每条各施用 (5) 型的公式. 既然这个公式, 除两端外, 还用到中间的纵坐标, 于是我们必须把每一小区间 (1) 分别用 $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}, \cdots, x_{n-\frac{1}{2}}$ 诸点平分为二

①$a = 0$ 时抛物线退化为直线.

②Thomas Simpson (1710—1761) 是英国数学家. 这公式也许在他以前已经知道.

(如此原区间总共分成了 $2n$ 部分). 既然 n 条 (不是 $2n$ 条) 的底边都等于 $\frac{h}{n}$, 则其面积的近似式分别为

$$\frac{h}{6n}(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1),$$
$$\frac{h}{6n}(y_1+4y_{\frac{3}{2}}+y_2),\cdots,\quad \frac{h}{6n}(y_{n-1}+4y_{n-\frac{1}{2}}+y_n).$$

加在一起, 得出这个新的近似公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6n}[(y_0+y_n)+2(y_1+\cdots+y_{n-1})+4(y_{\frac{1}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}})], \tag{6}$$

它叫做抛物线公式或辛普森公式; 这公式在花费同样的力气之下往往可得出比梯形公式精确的结果, 因此经常采用.

我们重新用辛普森公式再来计算一次积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 以作对比. 取 $2n=4$, 如此这次所用到的纵坐标值个数甚至比以前还少. 我们有 (计算至五位小数):

$$\begin{array}{lllll} x_0=0 & x_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4} & x_1=\frac{1}{2} & x_{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4} & x_2=1 \\ y_0=1 & 4y_{\frac{1}{2}}=3.76471 & 2y_1=1.6 & 4y_{\frac{3}{2}}=2.56 & y_2=0.5 \end{array}$$
$$\frac{1}{12}(1+3.76471+1.6+2.56+0.5)=0.78539\cdots$$

—— 五位小数全都正确!

当然, 前段末尾所作笺注在此可以重复一遍. 现在我们马上就来讲近似公式的误差估计.

191. 近似公式的余项 我们先来考虑梯形公式相应于 $n=1$ 时这一最简单的特例, 即公式 (1). 用一个 "余项" ρ 来恢复这个公式的精确性, 如此可写:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\rho,$$

而问题就是要给 ρ 来找一个便于估值的表达式.

我们假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有头两阶的连续导函数. 于是积分 $\int_a^b f(x)dx$ 经下面的初等变换 —— 即复重三次分部积分法 —— 立即导出所求的 ρ 的表达式.

我们有:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)d(x-a) = f(b)(b-a)-\int_a^b f'(x)(x-a)dx,$$
$$\int_a^b f'(x)(x-a)dx = \int_a^b f'(x)(x-a)d(x-b) = -\int_a^b (x-b)d[f'(x)(x-a)]$$
$$= -\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx - \int_a^b f'(x)(x-b)dx,$$
$$\int_a^b f'(x)(x-b)dx = \int_a^b (x-b)df(x) = f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)dx.$$

对比这几个等式, 我们得出

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[f(a)+f(b)] - \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx,$$

由此有

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx,$$

所以

$$\rho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx.$$

因为函数 $f''(x)$ 是连续的而 $(x-a)(x-b)$ 在区间 $[a,b]$ 内不变正负号, 则按推广中值定理 [**182** 段, 10°] 有

$$\rho = \frac{1}{2}f''(\bar{\xi})\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\bar{\xi}),$$

这里 $a \leqslant \bar{\xi} \leqslant b$①.

如果把区间 $[a,b]$ 分为 $n>1$ 个相等的部分, 则对每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 按所证明的将有精确公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_i+y_{i+1}}{2} - \frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(\xi_i) \quad (x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}).$$

将这些等式逐项加起来 $(i=0,1,\cdots,n-1)$, 得:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_n\right) + R_n$$

$$(h=b-a),$$

这里

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}\cdot\frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

一式就是梯形公式 (3) 的余项.

以 m 及 M 分别表示连续函数 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的最小值及最大值 [**73** 段]; 于是算术平均数

$$\frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

也就介于 m 与 M 之间. 按连续函数的一个熟悉的性质 [**70** 段], 必可在 $[a,b]$ 中找到这样一点 ξ, 使上式精确地等于 $f''(\xi)$. 所以我们终于有

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}f''(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{7}$$

在 n 增大时这个余项大概随 $\frac{1}{n^2}$ 而变小②.

例如, 我们又回来计算这个在 **189** 段做过的积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 对于被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 我们有 $f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$; 这个导函数在区间 $[0,1]$ 内变正负号, 但绝对值保持小于 2. 由此, 按公式 (7), $|R_{10}| < 0.0017$. 我们算出了纵坐标的四位数字, 精确度达 0.00005; 不难看出, 由于纵坐标截取整值所生误差可以包含在上面的估计式里. 真正的误差事实上小于这个范围.

①公式 (1) 余项表达式的这种推导法出于学生 Г. 蔡金 (Цейтин).

②我们在此说 "大概" 是因为 ξ 也可以随 n 而变, 这一点今后要记得.

对于辛普森公式 (6) 我们只写出其余项而不加推证. 在函数 $f(x)$ 有四阶连续导函数的假设之下这余项有这样的形式 (如果区间分为 $2n$ 部分):

$$R_{2n} = -\frac{h^5}{180 \cdot (2n)^4} f^{(4)}(\eta) \quad (a \leqslant \eta \leqslant b). \tag{8}$$

重新回到积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 为了避免出现于公式 (8) 中的四阶导函数的计算, 我们注意函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 本身就是 $y = \arctan x$ 的导函数, 如此我们可以利用 **96** 段, 5) 的公式. 按它有

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

由此得 $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$, 所以按公式 (7) 有 $|R_4| < \frac{1}{1920} < 0.0006$. 真正的误差我们已看出显著地小于这个范围.

192. 例 最后, 为了给一个预先知道其数值的定积分的近似计算实例, 我们用辛普森公式来计算第二类完全椭圆积分①.

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx,$$

精确度要达 0.001.

对于函数 $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}$ 在 x 由 0 变至 $\frac{\pi}{2}$ 时我们有 $|f^{(4)}(x)| < 12$②, 所以 [参看 (7)]

$$|R_{2n}| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 12 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n)^4}, \quad 因为 \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

---

①勒让德称函数 $F(k, \varphi)$ 及 $E(k, \varphi)$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时为完全的: 在这情形其符号中可省略第二自变量而简写为 $F(k), E(k)$. 对完全椭圆积分也有特别的表.

②显然, $y = f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$; 微分恒等式

$$y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x,$$

不难逐步得出导函数 $y', y'', y''', y^{(4)}$ 的绝对值的上方估计式.

我们取 $2n = 6$, 如此 $|R_6| < 0.00052$. 于是

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = 0(0^\circ) & y_0 = 1.0000 & \\
x_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{12}(15^\circ) & 4y_{\frac{1}{2}} = \sqrt{12+\sqrt{12}} = 3.9324 & \\
x_1 = \dfrac{\pi}{6}(30^\circ) & 2y_1 = \dfrac{\sqrt{14}}{2} = 1.8708 & \\
x_{\frac{3}{2}} = \dfrac{\pi}{4}(45^\circ) & 4y_{\frac{3}{2}} = \sqrt{12} = 3.4641 & \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{15.4771}{18} = 1.35063\cdots \\
x_2 = \dfrac{\pi}{3}(60^\circ) & 2y_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} = 1.5811 & \\
x_{\frac{5}{2}} = \dfrac{5\pi}{12}(75^\circ) & 4y_{\frac{5}{2}} = \sqrt{12-\sqrt{12}} = 2.9216 & \\
x_6 = \dfrac{\pi}{2}(90^\circ) & y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071 & \\
\hline
 & \text{总和}\quad 15.4771 &
\end{array}
$$

对所得结果除校正数 R_6 以外还须添加一个取整数值时所生误差的校正数, 它不超过 $\dfrac{0.0003\cdot\pi}{36} < 0.00003$.

如此,

$$1.35011 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1.35118,$$

并可以肯定 $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.351_{\pm 0.001}$.

(事实上在所得结果中全部数字都是正确的!)

这个例子的意义在此: 相应的原函数不能以有限形式表出, 如此不可能利用它来计算定积分.

反之, 如果在这个以及类似的情形原函数表为变上限定积分的形式, 则可以计算这些积分相应于一系列上限值的积分值. 由此在原则上阐明了, 对于只由积分式给出的函数也如读者所熟悉的初等函数一样可以造表.

第十二章　积分学的几何应用及力学应用

§1. 面积及体积

193. 面积概念的定义 · 可求积[①]区域 所谓多边形区域 (或简称多边形), 乃指由一条或几条折线所围成的任意有限平面图形而言 (但可能是不连通的). 这种图形的面积在中学几何课本里已详细讨论过, 我们现在就以此为基础.

现在我们在平面上任意取一个有界闭区域的图形 (P). 它的边界或界线 (K) 我们想象其为一条或几条闭曲线.

我们来考虑所有可能的整个被包含在 (P) 内的多边形 (A) 及整个包含着 (P) 的多边形 (B) (图 71). 如果 A 及 B 各表其面积, 则恒有 $A \leqslant B$. 数集 $\{A\}$ 上方既为任何 B 所囿, 则必有一上确界 P_* [**6** 段], 而 $P_* \leqslant B$. 同样, 数集 $\{B\}$ 既下方被 P_* 所囿, 则必有一下确界 $P^* \geqslant P_*$. 这两个界第一个可称为图形 (P) 的内面积, 第二个可称为外面积.

如果两界

$$P_* = \sup\{A\} \quad \text{及} \quad P^* = \inf\{B\}$$

重合为一, 则其共同值 P 称为图形 (P) 的**面积**. 在这情形图形 (P) 称为可求积的.

1°. 要面积存在, 其必要且充分的条件是: 对于任何一个 $\varepsilon > 0$, 总能找到这样两个多边形 (A) 及 (B), 使得 $B - A < \varepsilon$.

事实上, 这条件的必要性可由确界的基本性质推出 [**6** 段]: 如果面积 P 存在, 则可找到一个 $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ 及一个 $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$. 充分性则可立即由下列不等式推出:

$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B.$$

[①]原字是 “可成方” 或 “可求方” 之意. —— 译者注

同此意思也可以用另一方式来表出.

在区域 (P) 的可求积性问题中其边界曲线 (K) 占重要的地位.

如果可求积, 则如我们刚才所见, 对给定的 $\varepsilon > 0$ 曲线 (K) 可以被包含在一个多边形区域 $(B - A)$ 内, 这区域是被夹在两个多边形 (A) 及 (B) 的界线之间而具有面积 $B - A < \varepsilon$ 的 (参看图 71).

现在我们反过来假设界线 (K) 可以包含在一个多边形区域 (C) 内, 其面积为 $C < \varepsilon$, 而 ε 是任一预先给定的正数. 不失一般性, 在此可假设 (C) 不覆盖整个图形 P. 于是由区域 (P) 中不落在 (C) 内的点组成一个多边形区域 (A) 而被包含于 (P) 内; 如果将 (C) 并入 (A), 则得一多边形区域 (B), 它已把 (P) 包括进去了. 既然 $B - A = C < \varepsilon$, 则由此根据 1° 推出区域 (P) 是可求积的.

为了说话省力起见我们约定, 一条曲线 (K) (闭或非闭) 如果可以被面积任意小的多边形区域所覆盖, 就说它有*零面积*. 于是由上面的论证可求积性条件可以陈述为这个新的形式:

2°. *要图形 (P) 可求积, 其必要且充分的条件是: 它的界线 (K) 有面积 0.*

因此, 在曲线中划分出零面积曲线这一个大类型来, 是一件有重要意义的事情.

容易证明, 任何由

$$y = f(x) \quad 或 \quad x = g(y) \tag{1}$$
$$(a \leqslant x \leqslant b) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

(f 及 g 为连续函数), 这样显式方程所表出的连续曲线都是具有零面积这一性质的.

例如, 我们来讨论一下第一个方程吧. 按任一给定的 $\varepsilon > 0$ 可以把区间 $[a, b]$ 分为 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 等部分, 使在每个分区间中函数 f 的振幅 ω_i 为 $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ [**75** 段]. 如果照常例 m_i 及 M_i 分别表示 f 在第 i 分区间中的最小值及最大值, 则我们的全曲线可以由

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

等矩形所组成的图形所覆盖 [图 72], 这些矩形总面积为

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \varepsilon,$$

这就是所求证的. 也就是说, 曲线 (1) 有零面积. 由此推知:

3°. *如果一个图形 (P) 由几条连续曲线所围, 每条各由一显式方程 (1) (两类型中之一) 所表出, 则该形必可求积.*

事实上, 既然每一上述曲线都有零面积, 则全界线显然也有零面积.

194. 面积的可加性　我们想象有一个图形 (P) 被分成了两个图形 (P_1) 和 (P_2)①: 这可以, 比如说, 用一条联结界线上两点的曲线来分, 或由一条完全落在 (P) 内的曲线来分 (图 73(a) 及 (b)). 于是成立这个定理:

①它们可有一部分界限相重, 但图形不相叠, 即无共同内点.

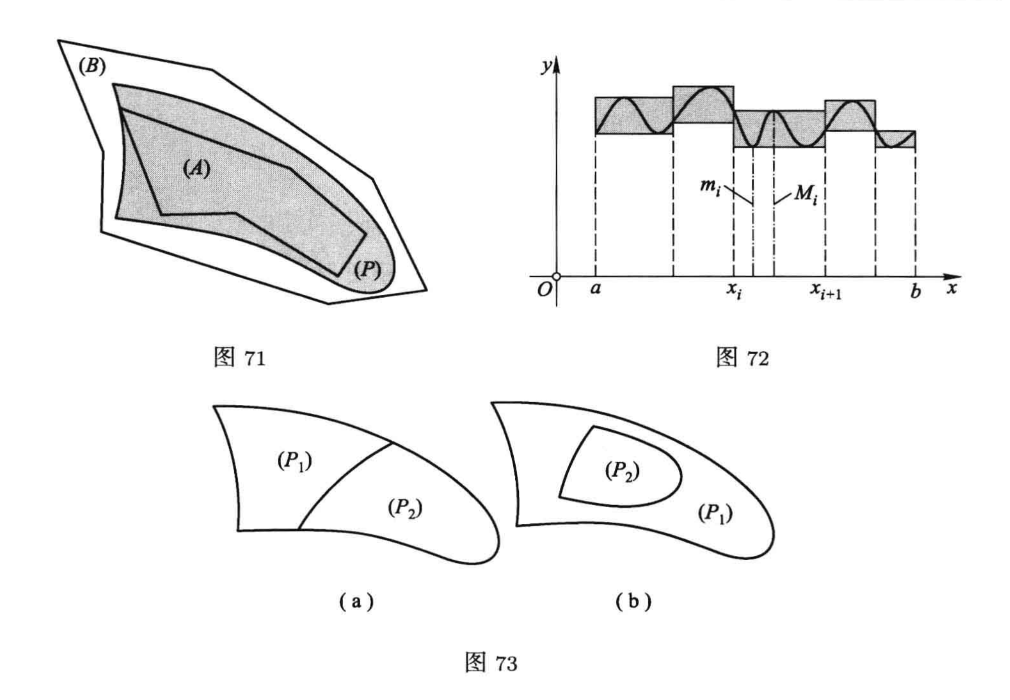


图 71

图 72

图 73

4°. 这三个图形 $(P), (P_1), (P_2)$ 中只要有两个可求积, 则第三个也就可求积, 并且恒有

$$P = P_1 + P_2, \tag{2}$$

也就是说, 面积具有可加性.

定理中可求积一句可立即由条件 2° 推出. 剩下只要证明等式 (2) 就行了. 我们来考虑图形 (P_1) 及 (P_2) 的相应内外多边形 $(A_1), (B_1)$ 及 $(A_2), (B_2)$. 互不重叠的多边形 $(A_1), (A_2)$ 组成一个多边形区域 (A), 其面积为 $A = A_1 + A_2$, 而完全被包含在区域 (P) 里. 多边形 (B_1) 与 (B_2) —— 可能交叠 —— 则组成一个区域 (B), 其面积为 $B \leqslant B_1 + B_2$, 而包含区域 (P).

我们同时有

$$A_1 + A_2 \leqslant P \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

及

$$A_1 + A_2 \leqslant P_1 + P_2 \leqslant B_1 + B_2,$$

如此 P 及 $P_1 + P_2$ 二数包含在同一组可以任意接近的上下界 $A_1 + A_2$ 与 $B_1 + B_2$ 之间, 所以该二数相等, 这就是所要证明的.

特别是, 由此有 $P_1 < P$, 所以图形的一部分的面积小于全图形的面积.

195. 面积作为极限 前段所陈述的可求积条件 1° 可以改变说法如下:

5°. 要图形 (P) 可求积, 则其必要且充分的条件是要存在这样两个多边形序列

$\{(A_n)\}$ 及 $\{(B_n)\}$, 前一被包含于 (P), 后一覆盖 (P), 而其面积有一共同极限

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \tag{3}$$

这极限显然就是图形 (P) 的面积.

有时多边形利于用其他已知可求积的图形来替代:

6°. 如果对于图形 (P) 可以做出这样两个**可求积**图形序列 $\{(Q_n)\}$ 及 $\{(R_n)\}$, 前一被包含于 (P), 后一覆盖 (P), 而其面积有一共同极限

$$\lim Q_n = \lim R_n = P,$$

则图形 (P) 也可求积, 而上面那极限就是它的面积.

这可立即由前一条推出, 只要每个图形 (Q_n) 代之以其中所包含的多边形 (A_n), 而图形 (R_n) 代之以包含它的多边形 (B_n), 而面积与它如此接近, 使 (3) 也同时实现.

196. 以积分表出面积 现在我们借助积分来计算平面图形的面积.

在首要地位我们先以严格讲法来讨论已遇到过的决定曲线梯形面积问题 (图 74). 这图形 $ABCD$ 上方由方程

$$y = f(x)$$

所表曲线 DC 为界, 这里 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 内的一个正连续函数; 它下方以 x 轴上线段 AB 为界, 而两侧以纵坐标线 AD 及 BC 为界 (也可缩为一点). 特别是, 所考虑图形 $ABCD$ 的面积 P 的存在可由 3° 推知, 而问题只是如何计算它.

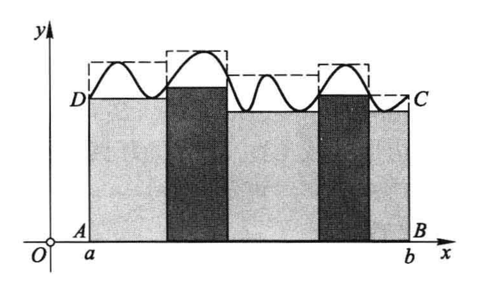


图 74

因此我们把区间 $[a, b]$ 按寻常方式分为小区间, 即在 a 与 b 间插入一系列点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

以 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个分区间中 $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 的最小值及最大值而做出达布和

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

它们显然就是分别由内外矩形所组成的阶梯形的面积 (参看附图). 所以

$$s < P < S.$$

但当 Δx_i 中最大者趋于零时, 两和有积分 $\int_a^b f(x)dx$[①] 为其极限, 因此也就等于所求的面积

$$P = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

如果曲线梯形 $CDFE$ 下方上方均以曲线为界 (图 75), 其界线方程式为

$$y_1 = f_1(x) \quad 及 \quad y_2 = f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

则将它看作 $ABFE$ 及 $ABDC$ 两图形之差而得出该所求梯形面积如下 [参看 4°]:

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{5}$$

现在设给出了一个扇形 AOB (图 76), 其边界为一条曲线 AB 及两条矢径 OA 与 OB (每条均可缩为一点). 在此曲线 AB 由极坐标方程 $r = g(\theta)$ 所给出, 而 $g(\theta)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 里的一个正连续函数.

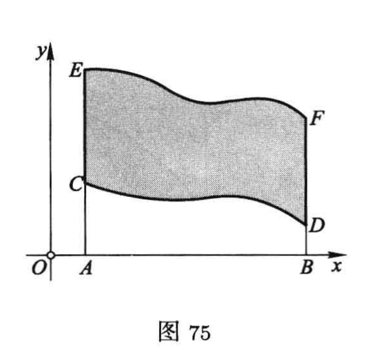


图 75

图 76

在 α 与 β 间插入下列诸值 (参看附图):

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_i < \theta_{i+1} < \cdots < \theta_n = \beta,$$

并作这些角的相应矢径. 如果在此也引入函数 $g(\theta)$ 在 $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ 里的最小值及最大值为 μ_i 及 M_i, 则由这些半径所扫出的圆扇形将分别为图形 (P) 的内外形. 我们分别由内扇形及外扇形组成两个图形, 其面积为

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2 \Delta\theta_i \quad 及 \quad \sum = \frac{1}{2}\sum_i M_i^2 \Delta\theta_i.$$

[①] 由 5° 这本身就证明曲线梯形 $ABCD$ 的可求积; 要得出那里所说的图形序列, 可以, 比如说, 将区间分为 n 个相等的部分, 而 n 增至无穷.

容易看出这两个和 σ 及 $\sum$ 就是积分 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2 d\theta$ 的达布和; 在差数 $\Delta\theta_i$ 中最大的趋于零时, 则这个积分就是该两和的共同极限. 于是由 6°①图形 (P) 可求积而

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2 d\theta. \tag{6}$$

例 1) 给定了一个椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及它上面的一个点 $M(x,y)$ (图 77). 试求曲线梯形 $BOKM$ 及曲线扇形 OMB 的面积.

由椭圆方程我们有 $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, 如此按公式 (4) 有

$$\begin{aligned} P_1 = \text{ 面积 } BOKM &= \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx \\ &= \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

既然后一项表示 ΔOKM 的面积, 则去掉它以后我们得出扇形面积的表达式为

$$P_2 = \text{ 面积 } OMB = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a.}$$

在 $x = a$ 时我们找到椭圆的四分之一的面积为 $\frac{\pi ab}{4}$, 如此全椭圆面积 $P = \pi ab$, 对于圆则 $a = b = r$ 而得出熟悉的公式 $P = \pi r^2$.

2) 试求两条可叠合抛物线 $y^2 = 2px$ 与 $x^2 = 2py$ (图 78) 间所围图形的面积.

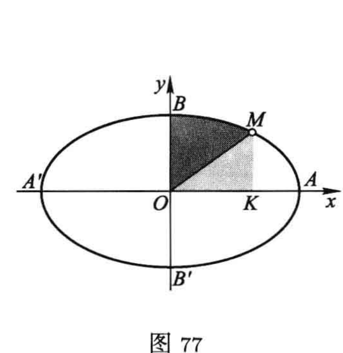


图 77

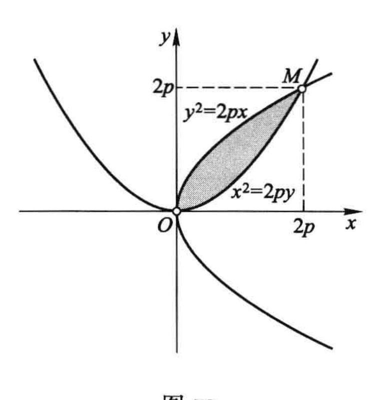


图 78

显然, 这要用到公式 (5) 而在其中令

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}.$$

要决定积分区间我们将所给两方程联立而解之, 如此求得两抛物线原点以外的交点 M 的横坐标, 它就等于 $2p$. 于是我们有

$$P = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2.$$

①要得 6° 中所说的图形序列, 在此就可以将区间分为 n 个相等的部分.

3) 公式 (4) 也可用于曲线梯形的边界曲线由参变方程所给出的情形:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T).$$

在积分 (4) 里进行变量替换而得 (设 $t = t_0$ 时 $x = a$ 而 $t = T$ 时 $x = b$):

$$P = \int_{t_0}^{T} y x_t' dt = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t) dt. \tag{7}$$

例如, 倘若要由参变表示法

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

来计算椭圆面积而认为当 t 由 π 减至 0 时, x 由 $-a$ 增至 a, 则我们得出

$$P = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t) dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

这里我们是算出上半个椭圆的面积而将其乘以 2.

4) 我们以同样方式来计算旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 所围图形的面积 (图 79). 我们按公式 (7) 有

$$P = \int_{0}^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

如此, 所求面积就等于半径为 a 的圆的面积的三倍.

5) 求阿基米德螺线 $r = a\theta$ 的一匝所包面积 (图 80). 按公式 (6) 我们有

$$P = \frac{1}{2}a^2\int_{0}^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{6}\theta^3\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2,$$

同时半径为 $2\pi a$ 的圆的面积则为 $4\pi^3 a^2$. 故螺线一匝的面积就等于圆面积的三分之一 (这结果阿基米德当时也已经知道了).

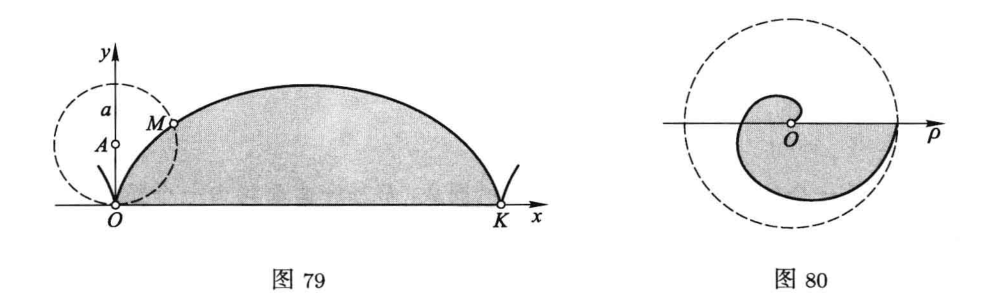


图 79　　图 80

197. 体积概念的定义及其性质 也如 **193** 段中那样, 由矩形面积概念出发而建立任意平面图形的面积, 现在我们依据多面体体积来给一般立体的体积定义.

如此, 设给了一个任意形状的立体 (V), 即由三维空间中闭曲面所包围的体. 体的边界 (S) 设为一个闭曲面 (或几个闭曲面).

我们来考虑完全含在我们这个体里面的体积为 X 的多面体 (X) 及包在外面的体积为 Y 的多面体 (Y). 对于 X 总存在有一上确界 V_*, 对 Y 总存在有一下确界 V^*, 而 $V_* \leqslant V^*$; 它们分别可称为该立体的内体积及外体积.

如果

$$V_* = \sup\{X\} \quad 及 \quad V^* = \inf\{Y\}$$

二数重合为一, 则其共同值 V 就称为**立体** (V) 的**体积**. 在这情形立体 (V) 有时也称为 “可成立方的”(可求积的).

在此也不难证明这个定理:

1°. *要体积存在的必要而充分的条件是: 对任一 $\varepsilon > 0$ 总能找到这样两个多面体 (X) 及 (Y), 使 $Y - X < \varepsilon$.*

还可以另一形式表述如下:

2°. *要立体 (V) 有体积, 其必要而充分的条件是要它的边界曲面 (S) 有体积 0, 即要该面能包含在一个体积任意小的多面体内.*

属于零体积曲面之数的首先有任一下列三型显式方程所表示的曲面:

$$z = f(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = h(y, z),$$

这里 f, g, h 分别为某有界区域内的二元连续函数.

设, 比如说, 给定了一个第一型的方程, 其定义域为 (P), 被包含在一个矩形 (R) 内. 按 **137** 段的定理, 不论 $\varepsilon > 0$ 如何, 总可将此矩形分为任意小的矩形 (R_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使函数 f 在区域 (P) 的被包含于 (R_i) 的部分 (P_i) 内的振幅 $< \dfrac{\varepsilon}{R}$. 如果 m_i 及 M_i 分别为函数 f 在 (P_i) 内的最小值及最大值, 则我们这个曲面可以被包容在一个由底面积为 R_i 高为 $\omega_i = M_i - m_i$ 的平行体所组成的多面体内. 这个多面体的体积是

$$\sum_i \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum_i R_i = \varepsilon,$$

这就是所要证明的.

所以:

3°. *如果一个体 (V) 由某些连续曲面所围成, 而每一曲面均由一个显式方程 (该三型之一) 所表出, 则该体必有体积.*

体积也如面积一样具有可加性:

4°. *如果一个体 (V) 分成两个体 (V_1) 和 (V_2), 则三体中每两个有体积时其余一个也就从而有体积, 且*

$$V = V_1 + V_2.$$

195 段对面积所证明的命题 5°, 6° 也不难对体积转述如下:

5°. 要体 (V) 有体积, 其必要而充分的条件是: 存在一个内多面体序列 $\{(X_n)\}$ 及一个外多面体序列 $\{(Y_n)\}$, 其体积有**一共同极限**

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

这极限就是体 (V) 的体积.

上述命题中多面体也可代之以其他任何显然知有体积的体. 如此我们有这样的命题:

6°. 如果对体 (V) 可以做出一个内体序列 $\{(T_n)\}$ 及一个外体序列 $\{(U_n)\}$, 各体都有体积, 而这些体积趋于一个**共同极限**

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

则体 (V) 也就有体积, 即等于该**极限**.

198. 以积分表出体积 我们先提一下这几乎明显不待言的事实: 一个正柱体, 若其高为 H, 其底为**可求积**平面形 (P), 则其体积存在而等于底面积与高之乘积: $V = PH$.

我们取多边形 (A_n) 及 (B_n), 前者含于 (P) 内, 后者包含着 (P), 而其面积 A_n 及 B_n 同趋于极限 P [**195** 段, 5°]. 如果在这些多边形上作高为 H 的正棱柱体 (X_n) 及 (Y_n), 则其体积

$$X_n = A_n H \quad 及 \quad Y_n = B_n H$$

将趋于共同极限 $V = PH$, 它就是我们这正柱体的体积 [**197** 段, 5°].

现在我们来考虑一个体 (V), 包含在 $x = a$ 及 $x = b$ 两平面之间, 并以垂直于 x 轴的平面截割之 (图 81). 我们假设所有这些截面都是可求积的, 并设相应于横坐标 x 的截面的面积 $P(x)$ 是 x 的连续函数 $(a \leqslant x \leqslant b)$.

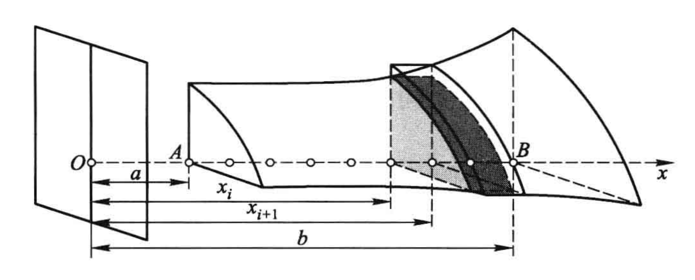


图 81

如果将两个相似截面不经扭曲投射于任一垂直于 x 轴的平面上, 则它们可以或者一个包含于另一个内 (如图 82(a)), 或者局部重叠 (图 82(b)), 或者一个在另一个之外 (图 82(c)).

我们要来讨论的是第一种情形: 两个不同的截面投射于一个垂直于 x 轴的平面上后其一恒包含另一之内.

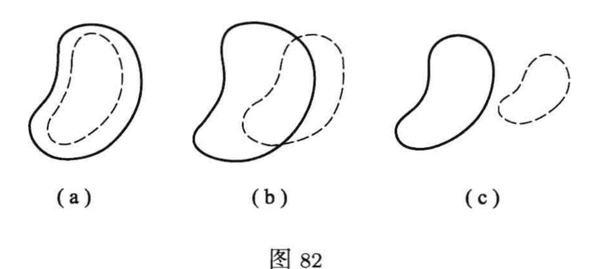


图 82

在这种假设之下可以肯定该体必有体积, 它由这个公式所表出:

$$V = \int_a^b P(x)dx. \tag{8}$$

证明时我们将 x 轴上的区间 $[a, b]$ 用

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

诸点分为若干部分而以通过各分点 $x = x_i$ 的平面将整个体分成若干片. 我们试看包含在平面 $x = x_i$ 与 $x = x_{i+1} (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 之间的这第 i 片. 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 内函数 $P(x)$ 有最大值 M_i 及最小值 m_i; 如果相应于此区间中各不同值的截面都放在同一平面上, 比如说, $x = x_i$ 这平面上, 则它们在所作假设之下将全都包含在具有面积 M_i 的最大截面内, 并包含着具有面积 m_i 的最小截面. 如果在这两个最大与最小截面上各作一高 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 的正柱体, 则较大的一个将包含该体所考虑的一片, 而较小的一个将被该片所包含. 根据本段开始所说, 这两个柱体的体积将分别为 $M_i \Delta x_i$ 及 $m_i \Delta x_i$.

由诸内柱体组成一体 (T), 由诸外柱体组成一体 (U); 其体积各等于

$$\sum_i m_i \Delta x_i \quad 及 \quad \sum_i M_i \Delta x_i$$

而当 $\lambda = \max \Delta x_i$ 趋于零时有一共同极限 (8). 由 **197** 段, 6° 知道这就是体 (V) 的体积①.

显然满足上述截面相互位置假设的重要特例就是*旋转体*. 我们设想在平面 xy 上有一条曲线, 由方程式 $y = f(x) (a \leqslant x \leqslant b)$ 所给出, 这里 $f(x)$ 连续而且非负; 我们将其所围曲线梯形绕 x 轴旋转 (图 83(a) 及 (b)). 所得到的体 (V) 显然属于当前的特例, 因为它的截面投射到垂直于 x 轴的平面上时成一系列同心圆. 这里

$$P(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2,$$

如此

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{9}$$

①例如将区间分为相等的部分, 就容易分出该命题中所说到的内体序列及外体序列.

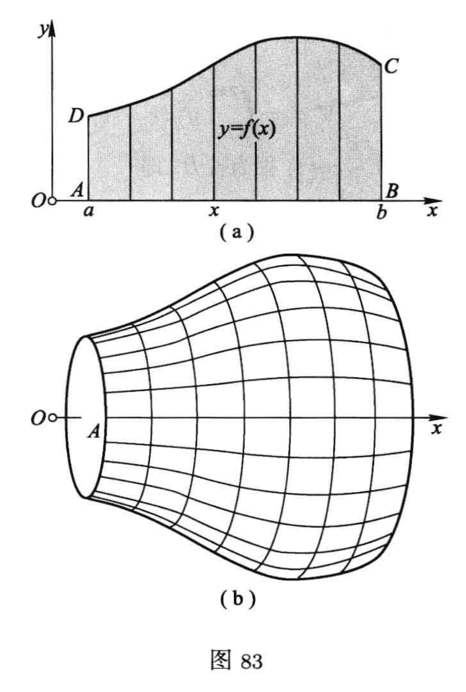


图 83

如果一个曲线梯形下方及上方由曲线 $y_1 = f_1(x)$ 及 $y_2 = f_2(x)$ 所围, 则显然

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\} dx, \tag{10}$$

虽然关于截面的假设在此也可以不实现. 一般说来, 所证明的结果不难推广到所有这种由满足上述假设的体加减而得的体上.

在一般的情形只能肯定: *如果体* (V) *有体积*①, *则它可由公式* (9) *表出*.

例 1) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转. 既然

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

则我们求得旋转椭圆体的体积为

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2 ②.$$

同样我们可求得绕 y 轴旋转所得之体的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. 在这些公式里设 $a = b = r$, 则得出大家所熟悉的半径为 r 的球的体积 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

---

①例如一个体满足定理 3° 的条件时就是如此.

②容易看出, $\int_{-a}^{0} = \int_0^a$ (替换为 $x = -t$).

2) 对一支旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 求同样的旋转体体积.

曲线的参变公式使公式

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx$$

中作替换 $x=a(t-\sin t), dx=a(1-\cos t)$ 很为省力. 即:

$$V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$=5\pi^2a^3.$$

3) 试求由标准方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所给出的三轴椭圆体的体积 (图 84).

通过 x 轴上一点 $M(x)$ 而垂直于此轴的平面交椭圆体成一椭圆; 其在 yz 平面上未经扭曲的投影的方程是这样的:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1\quad (x=\text{常数}).$$

由此知其半轴分别为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad 及\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

而面积可表为 [**196** 段, 1)]:

$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

如此, 按公式 (8) 所求体积为

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

4) 我们考虑两个半径为 r 的圆柱, 其轴相交成直角; 现在来求其所围之体的体积.

图 85 上的体 $OABCD$ 即该体的八分之一. 我们作 x 轴通过两圆柱轴的交点 O 并垂直于该二轴. 于是作一平面与 O 成距离 x 并垂直于 x 轴, 与体 $OABCD$ 相交, 而截成一正方形 $KLMN$, 其边 $MN=\sqrt{r^2-x^2}$, 如此 $P(x)=r^2-x^2$. 于是按公式 (8) 有

$$V=8\int_0^r(r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}r^3.$$

5) 最后我们来解同一问题, 但假设两圆柱有不同半径 r 及 $R(>r)$.

与前例的差别只在所截正方形 $KLMN$ 现在成矩形, 其边为 $\sqrt{r^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}$. 如此, 在本例体积 V 已经要用

$$V=8\int_0^r\sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}dx$$

这个椭圆积分来表出了, 或者, 作代换 $x=r\sin\varphi$ 而令 $k=\frac{r}{R}$, 则

$$V=8Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi=8Rr^2\cdot I.$$

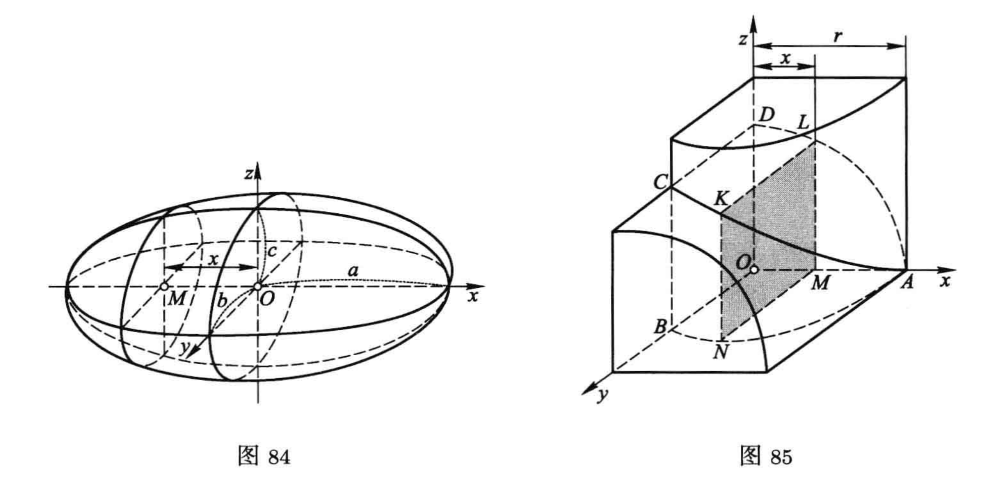


图 84　　　　图 85

现在我们来把积分 I 化为完全椭圆积分.① 首先是,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi-k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=I_1+I_2.$$

但是

$$\begin{aligned}I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi&=\frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi\\&=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)F(k)+\frac{1}{k^2}E(k).\end{aligned}$$

另一方面, 由分部积分我们有

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\\&=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi=E(k)-2I.\end{aligned}$$

由此有

$$I=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)E(k)-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)F(k)\right].$$

如此, 最后得出

$$V=\frac{8R^3}{3}[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)F(k)].$$

§2. 弧长

199. 弧长概念的定义　我们来考虑平面上一条曲线 AB (先考虑非闭曲线), 由

①参看 **192** 段脚注.

参变方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

所给出, 而函数 φ 及 ψ 假设是连续的. 我们认为点 A 相应于 $t = t_0$, 而点 B 相应于 $t = T$. 在此假设曲线上没有重点, 如此参变量 t 的不同数值就相应于曲线上不同的点.

如果把曲线上的点按参变量 t 的增大排列成次序 (两个点中相应于较大参变值者看作在后), 则由此在曲线上建立了一个一定的方向 (图 86).

现在我们在曲线 AB 上取一系列的点

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_i, M_{i+1}, \cdots, M_m = B,$$

按所指示方向一个跟着一个; 它们相应于一系列递增的参变值

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_m = T.$$

我们沿曲线 AB 上作一折线[①] $(p) = AM_1M_2 \cdots B$ 而以 p 表其全长[②].

当折线 (p) 的边 M_iM_{i+1} 中最大的趋于零时, 其全长 p 所趋有限极限 s 称为**弧 AB 之长**:

$$s = \widehat{AB} = \lim p.$$

如果这个极限存在, 则该曲线称为 "可直化的" 或有长的.

这个定义的涵义可以如此阐述: 不论沿曲线上取怎样一个折线序列 $\{(p_n)\}$, 只要满足折线 (p_n) 的最大边随 n 的增大而趋于零这个条件, 则全长 p_n 就趋于一个极限 s.

也可用 "$\varepsilon - \delta$ 言辞" 表之如下: 对于每个 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样一个 $\delta > 0$, 使不等式

$$0 \leqslant s - p < \varepsilon$$

在沿该曲线上所作折线每节

$$\overline{M_iM}_{i+1} < \delta$$

时恒成立.

这两个定义的等价性可以像寻常那样证明.

弧长的一个重要性质是它的可加性:

如果在弧 AB 上再取一点 C, 则只要弧 AB 有长, 则弧 AC 及 CB 也就有长, 并且

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}.$$

①② 对于任意的曲线所谓 "内接" (вписать) 这种说法在此没有意义, 因其无内外可言也. 同时 периметр 一字对非闭曲线也不能说是 "周长". 因此这两个字在这里都不便按通例直译. —— 译者注

这个事实我们承认它而不加证明. 其实对于我们寻常要考虑的曲线 (参看 **201** 段), 不仅弧长的存在可由弧长的积分表达式本身来保证, 而且弧长的可加性也可由此推出.

现在转向闭曲线的情形, 此时点 A 与 B 重合为一 (但仍然没有重点, 即每个异于 $A \equiv B$ 的点只在参变量 t 的一个值上得到). 不难看出, 在这情形上述弧长定义已经不能无条件地适用了: 试看 (图 87) 即使上述条件完全符合时也仍然无碍折线挤成一点而其周长趋于零. 问题在此: 非闭曲线的情形光是由于折线 (p) 各节全都趋于零、已足保证使其越来越紧密靠拢于相应的弧段; 所以自然可以取其全长 p 的极限作为全弧之长. 对于闭曲线, 情形就已经不是这样了①.

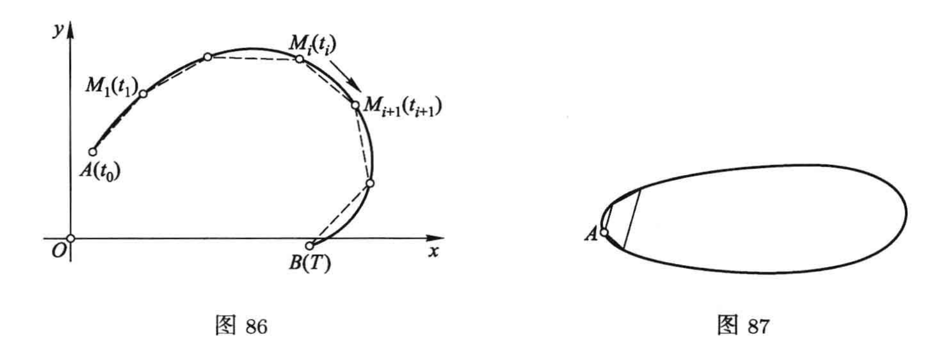


图 86　　　　图 87

固然可以把这个定义修改一下 (不免复杂化), 使其也能包括闭曲线的情形. 但我们为简单计宁可取另一途径, 即: 设想将闭曲线用它上面一个任意取来的点 C 分成两段非闭曲线, 而称其长之和为全曲线之长 (如果两段弧都有长的话). 依据弧长的可加性不难证明, 这个和事实上与点 A 及 C 的选择法无关.

200. 引理　我们重新来考虑没有重点的非闭曲线 (1). 对这种曲线我们要证明下列两个引理.

引理 1　*如果点 M' 及 M'' 相应于参变值 t' 及 $t''(t' < t'')$, 则对任一 $\delta > 0$ 必可找到这样一个 $\eta > 0$, 使在 $t'' - t' < \eta$ 时弦长 $\overline{M'M''} < \delta$.*

事实上, 既然 (1) 中函数 φ 及 ψ 是一致连续的, 则对于 $\delta > 0$ 可找出这样一个 $\eta > 0$, 使 $|t'' - t'| < \eta$ 时同时有

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

从而也就有

$$\overline{M'M''} = \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} < \delta.$$

引理 2　*对于任何 $\eta > 0$ 恒存在有这样的 $\delta > 0$, 使得只要弦 $\overline{M'M''} < \delta$, 则此时相应于其两端的参变值之差 $t'' - t'(t' < t'')$ 就 $< \eta$.*

① 如果回忆一下初等几何教程中以内接正多边形周长极限作圆周长定义, 则正多边形这一限制正可防止这里所说的可能性.

我们假设其反面; 此时对某一 $\eta > 0$, 在任何 $\delta > 0$ 之下可找到这样两点 $M'(t')$ 及 $M''(t'')$, 使 $\overline{M'M''} < \delta$ 而同时 $t''-t' \geqslant \eta$. 取一个收敛于 0 的序列 $\{\delta_n\}$ 而依次设 $\delta = \delta_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 如此得出两个点序列 $\{M'_n(t'_n)\}$ 及 $\{M''_n(t''_n)\}$, 对它们

$$\overline{M'_n M''_n} < \delta_n, \quad \text{但} \quad t''_n - t'_n \geqslant \eta \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

不失一般性, 按波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理 [**51** 段], 在此可假设

$$t'_n \to t^*, \quad t''_n \to t^{**}$$

(这只要必要时取子序列即可达成). 显然,

$$t^{**} - t^* \geqslant \eta,$$

如此 $t^* \neq t^{**}$. 同时对相应的点 M^* 及 M^{**} 我们有 $\overline{M^*M^{**}} = 0$, 即两点应重合为一, 但这是不可能的, 因为所论曲线没有重点且为非闭曲线, 这个矛盾完成了本引理的证明.

由这两个引理可见, 在下非闭曲线弧长定义时, 由这两个条件出发是完全没有区别的: 或者要弦折线的边 $\overline{M_iM_{i+1}}$ 最大的趋于 0 [按 **199** 段], 或者要差数 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 最大的趋于 0; 因为这两个条件每个都能由另一个推出. 目前对我们比较方便是, 即由后一个条件来描述极限过程.

201. 以积分表出弧长 我们更假设非闭曲线方程 (1) 中的函数 φ 及 ψ 有连续的导函数 φ' 及 ψ'. 我们将证明, 在这些条件之下曲线是有长的并且弧长可由公式

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt \tag{2}$$

表出.

我们首先将区间 $[t_0, T]$ 用

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T$$

诸点分为长 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 的分区间. 相应于这些 t 值有弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的折线 $AM_1 \cdots M_{n-1}B$ 的顶点, 而 (如上面所说明) 该弧之长 s 可下定义为折线全长 p 在 $\lambda^* = \max \Delta t_i$ 趋于 0 时的极限.

令

$$\varphi(t_i) = x_i, \quad \psi(t_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

并且

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

弦折线第 i 节 M_iM_{i+1} 之长可如此表出:

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

分别施用有限增量公式于函数 (1) 的增量 Δx_i 及 Δy_i, 我们得:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i + \Delta t_i) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$
$$\Delta y_i = \psi(t_i + \Delta t_i) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_i^*)\Delta t_i,$$

这里的 τ_i 及 τ_i^* 则只知其介于 t_i 与 t_{i+1} 之间. 现在我们有

$$\overline{M_i M}_{i+1} = \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\Delta t_i,$$

如此对折线全长得出下式:

$$p = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\Delta t_i.$$

如果根号下第二项里的 τ_i^* 也一律代之以 τ_i, 则上式变为

$$\sigma = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\Delta t_i,$$

它显然恰好是积分 (2) 的*积分和*. 在 λ^* 趋于 0 时这个和也就有上述积分为其极限①. 要证明折线全长 p 也趋于同一极限, 只要证实差数 $p - \sigma$ 趋于 0.

因此我们来做出这差数的估值式

$$|p - \sigma| \leqslant \sum_i \left|\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right|\Delta t_i.$$

如果在上面的总和中各项施用这个初等不等式

$$\left|\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right| \leqslant |b_1 - b|^{②},$$

则得出

$$|p - \sigma| \leqslant \sum_i |\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)|\Delta t_i.$$

由于函数 $\psi'(t)$ 的连续性, 对于任何给定的 $\varepsilon > 0$ 可以找到这样一个 $\delta > 0$, 使 $|\psi'(t^*) - \psi'(t)| < \varepsilon$, 只要 $|t^* - t| < \delta$. 如果取所有 $\Delta t_i < \delta$, 则也有 $|\tau_i^* - \tau_i| < \delta$, 如此 $|\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| < \varepsilon$, 并且

$$|p - \sigma| \leqslant \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon(T - t_0).$$

①它的存在是无疑的, 因为被积式是连续函数 [**179** 段, I].

②这不等式在 $a = 0$ 时显然成立; 在 $a \neq 0$ 时则它可立即由恒等式

$$\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{b_1 + b}{\sqrt{a^2 + b_1^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}(b_1 - b)$$

推出, 因为括号里的差数的绝对值小于 1.

这就证明了我们的断言.

如果曲线由直角坐标显式方程

$$y = f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X)$$

所给出, 则取 x 作参变量时由公式 (2) 我们作为它的一个特例得出

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{2a}$$

最后, 曲线由极坐标方程

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta)$$

给出的情形也可借助寻常转换公式

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta$$

化为参变式; 这里 θ 就占参变量的地位. 对这情形

$$x_\theta' = r_\theta' \cos\theta - r\sin\theta, \quad y_\theta' = r_\theta' \sin\theta + r\cos\theta,$$

如此

$$x_\theta'^2 + y_\theta'^2 = r^2 + r_\theta'^2 \tag{3}$$

并且

$$s = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2} d\theta = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2} d\theta. \tag{2b}$$

注 公式 (2) 也直接可推广到闭曲线的情形. 在这情形我们取 t_0 与 T 间任意一个 t', 将所给曲线 (1) 用相应点 $M'(t')$ 分为两段非闭曲线 AM' 及 $M'B$, 而对每段曲线各施用 (2) 型公式:

$$s_1 = \overset{\frown}{AM'} = \int_{t_0}^{t'}, \quad s_2 = \overset{\frown}{M'B} = \int_{t'}^{T}.$$

将两结果加起来, 我们就得出全闭曲线之长:

$$s = s_1 + s_2 = \int_{t_0}^{T}.$$

例 1) 抛物线: $y = \dfrac{x^2}{2p}$.

取顶点 $O(x = 0)$ 作计算弧长的起点, 于是对横坐标为 x 的任意一点 M 我们有:

$$\begin{aligned} s = \overset{\frown}{OM} &= \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{x^2 + p^2} dx \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + p^2}) \right]_0^x \\ &= \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}. \end{aligned}$$

2) 旋轮线: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

这里 (在 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 时)

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin \frac{t}{2};$$

一支旋轮线之长按公式 (2) 为

$$S = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3) 阿基米德螺线: $r = a\theta$.

按公式 (2b), 计算由极点 O 至任一点 M (相应于角 θ) 的弧长得

$$s = \widehat{OM} = a \int_0^\theta \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2}[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})].$$

有趣的是, 在此令 $\theta = \dfrac{r}{a}$, 我们就得出形式与抛物线弧长表达式相似的式子 [参看 1)].

4) 椭圆: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

但在此取椭圆方程的参变形式比较方便: $x = a \sin t, y = b \cos t$. 显然,

$$\begin{aligned}\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} \\ &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t},\end{aligned}$$

这里 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 是椭圆的离心率.

我们在第一象限中由椭圆小轴上端起至其任意一点计算其弧长, 得

$$s = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = a \cdot E(\varepsilon, t).$$

如此, 椭圆弧长表为第二类椭圆积分 [**174** 段, 再参看 **183** 段]; 这也正是 “椭圆积分” 命名之由来.

特例, 椭圆周长四分之一可表为完全椭圆积分[①]

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = a \cdot E(\varepsilon).$$

全周长则为

$$S = 4a \cdot E(\varepsilon).$$

202. 变弧及其微分 我们在弧 AB 上取一相应于任意参变值 t 的点 M. 于是弧 $\widehat{AM}$ 之长按 (2) 式可表以公式

$$s = s(t) = \widehat{AM} = \int_{t_0}^t \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt \tag{4}$$

并且显然是一个 t 的连续增函数.

---

① 参看 **192** 段脚注.

此外, 由于被积函数的连续性, 这个变弧 $s=s(t)$ 将对 t 有导函数, 即等于被积函数 [**183** 段, 12°]:

$$s'_t=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}. \tag{5}$$

如果将此等式平方起来并逐项乘以 dt^2, 则得出这个简单出奇的公式

$$ds^2=dx^2+dy^2, \tag{6}$$

它具有同样的几何直观. 在图 88 的直角三角形 MNM_1 里 "正边" 作点 M 的坐标的增量: $MN=\Delta x, NM_1=\Delta y$, 而 "斜边" —— 弧 $\widehat{MM_1}=\Delta s$ 则为弧 $\widehat{AM}=s$ 的增量. 如此我们对增量的主部 —— 微分 —— (而不是对增量本身) 有一个特殊的 "毕达哥拉斯定理".

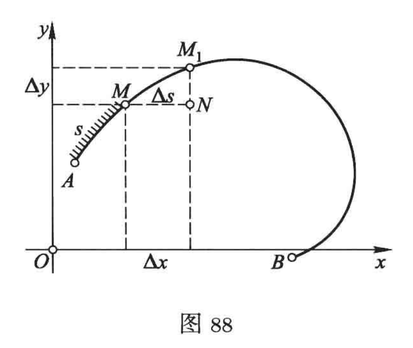


图 88

宜特别指出的是重要公式 (5) 的一些相应于曲线种种特殊给出法的特例. 如此, 如果曲线由笛卡儿显性方程 $y=f(x)$ 所给出, 则 x 成参变量的地位, 弧依凭着 x: $s=s(x)$, 而公式 (5) 成这样的形式:

$$s'_x=\sqrt{1+y'^2_x}. \tag{5a}$$

如果曲线由极坐标方程 $r=g(\theta)$ 所给出, 而参变量是 θ, 则弧这次是 θ 的函数: $s=s(\theta)$. 由 (3), 公式 (5) 可变成这样:

$$s'_\theta=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}. \tag{5b}$$

计算弧长常常取弧中一个内点作为起点 A, 而不是取其两端点之一, 这样较为便利. 在这情形自然沿参变量增大方向截取的弧算作正的, 沿相反的方向算作是负的, 并且与此相应, 在第一情形弧长赋以正号, 在第二情形赋以负号. 这里这个带正负号的弧的大小我们为简单计就直称为弧. 公式 (4)、(5)、(5a)、(5b) 是对一切情形都成立的.

既然变弧 $s=\widehat{AM}$ 是参变量 t 的连续一致增函数, 则反过来参变量 t 也就可以看作是 s 的单值连续函数 [**71** 段]. 把 t 的这个表达式代入方程 (1), 我们得出流动坐

标 x 及 y 表为 s 的函数:

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s), \quad y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

无疑, 这个作点 M 曲线坐标的弧 $s = \widehat{AM}$ 是决定其位置的最自然的参变量.

我们假设, 在给定 t 值之下, 两个导数 x'_t 及 y'_t 不同时为零 (这话的几何意义将在 **210** 段阐明), 于是

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} > 0,$$

而对相应 s 值存在一个导数 [**80** 段]

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}},$$

因此也存在导数

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s).$$

203. 空间曲线的弧长　关于空间曲线 (无重点)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

弧长的定义也可以像平面曲线那样给出 [**199—201** 段]. 这里也得出与 (2) 相似的弧长公式:

$$s = \widehat{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$$

等等. 所有对平面曲线所说过的都可搬到这里来, 几乎没有什么改变. 我们不必再对此多讲, 就来举几个例子吧.

1) 螺旋线: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ct$.

既然这里

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

则曲线由点 $A(t = 0)$ 至点 $M(t$ 任意) 的弧长为

$$s = \widehat{AM} = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}dt = \sqrt{a^2 + c^2}t.$$

只要记得螺旋线当其所附托的圆柱面摊平时随着变成一条斜直线, 这个结果就成为明显的事情.

2) 曲线: $x = R\sin^2 t, y = R\sin t\cos t, z = R\cos t$, 而 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

我们有

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} = R\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

在这情形全曲线之长可表为第二类完全椭圆积分

$$S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t}dt$$

$$= \sqrt{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}dt = \sqrt{2}R \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

§3. 力学及物理上的数量的计算

204. 定积分应用程式 讲定积分在力学、物理及技术范围的应用之先, 宜预先明了寻常应用问题中引到定积分的途径. 因此我们略述积分应用的一般程式, 而以已经讨论过的几何问题实例作说明.

我们设想要来决定一个常数 Q (几何的或其他的), 联系着一个区间 $[a,b]$. 在此设对 $[a,b]$ 的每个分区间 $[\alpha,\beta]$ 都有常数 Q 的一部分与之相应, 如此区间 $[a,b]$ 划分为分区间时常数 Q 也就跟着划分为相应部分.

说得精确一点, 就是 "区间函数" $Q\{[\alpha,\beta]\}$ 具有可加性, 如此区间 $[\alpha,\beta]$ 如果由部分区间 $[\alpha,\gamma]$ 及 $[\gamma,\beta]$ 所组成, 则

$$Q([\alpha,\beta]) = Q([\alpha,\gamma]) + Q([\gamma,\beta]).$$

现在问题是要计算其相应于全区间 $[a,b]$ 的值.

我们取平面曲线 $y=f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 为例 (图 89). 于是: 1) 曲线 AB 之长 S, 2) 曲线梯形 $AA'BB'$ 所围面积 P 及 3) 这梯形绕 x 轴的旋转体之体积 V, 三者都是所说类型的数量. 不难看出它们所引起的是些怎样的 "区间函数".

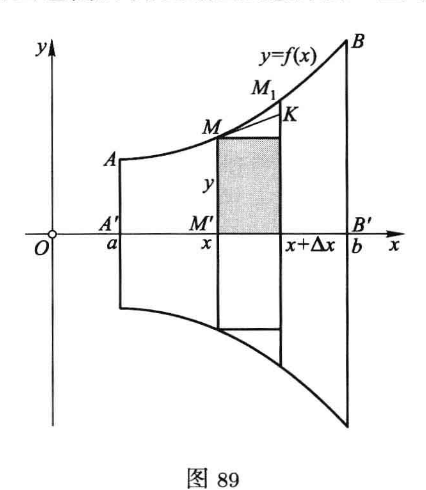


图 89

我们来考虑数量 Q 相应于 "元素区间" $[x, x+\Delta x]$ 的 "元素" ΔQ. 由问题的条件出发我们试给 ΔQ 找一个像 $q(x)\Delta x$ 这样的近似式, 是 Δx 的一次式, 而它与 ΔQ 也许只差一比 Δx 高阶的无穷小. 换句话说, 由无穷小元素 (在 $\Delta x \to 0$ 时) 分出其**主部**. 显然, 此时近似式

$$\Delta Q \approx q(x)\Delta x \tag{1}$$

的相对误差将随 Δx 而趋于 0.

如此, 在例 1) 里弧 $\widehat{MM_1}$ 的元素可代之以 MK 这一段切线, 而由 ΔS 分出一

次部分

$$\sqrt{1+y_x'^2}\Delta x=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x.$$

在例 2) 里自然 ΔP 这窄条可代之以内矩形, 其面积为

$$y\Delta x=f(x)\Delta x.$$

最后, 在例 3) 里由元素片 ΔV 分出其主部圆柱体, 其体积为

$$\pi y^2\Delta x=\pi[f(x)]^2\Delta x.$$

在所有三种情形不难证明, 由这样代换所生误差恒为比 Δx 高阶的无穷小.

只要这样一做, 就可以断言所求的数量 Q **精确地**由这个积分所表出:

$$Q=\int_a^b q(x)dx. \tag{2}$$

要说明这一点, 我们将区间 $[a,b]$ 用 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 诸点分为元素区间

$$[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_i,x_{i+1}],\cdots,[x_{n-1},b].$$

既然每一区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 或 $[x_i,x_i+\Delta x_i]$ 有 Q 的一个元素部分与之相应, 而这部分近似地等于 $q(x_i)\Delta x_i$, 则整个所求的数量 Q 可近似地由

$$Q\approx\sum_i q(x_i)\Delta x_i$$

这个总和所表出. 所得之值其精确度将随区间的变小而增高, 如此 Q 显然就是上面那总和的极限, 即事实上由定积分 $\int_a^b q(x)dx$ 所表出.

这完全概括了所考虑的三个例子. 虽然上面我们是以稍稍两样的方式得出了 S,P,V 诸量的公式, 但这是因为我们的问题不仅在其计算, 同时也在按早先所给定义证明其存在.

如此, 整个问题就成了要建立近似等式 (1), 它通常写成这样形状:

$$dQ=q(x)dx. \tag{3}$$

然后只剩下将这些 "元素" "加起来", 而得公式 (2).

要注意的是, 这里用积分而不用寻常的和, 这一点是很重要的. 和只能给出 Q 的近似式, 因为它上面反映出个别的 (3) 型等式的误差; 借助由和得出积分的极限过程则免除了误差而得到完全精确的结果. 如此, 先为了简单起见在元素 dQ 表达式中舍弃了高阶无穷小而分出主部, 然后为了精确起见以积分替代求和, 而所得结果就简直成为精确的了.

但是, 也可以由另一种观点来处理这个问题. 以 $Q(x)$ 表示 Q 的相应于区间 $[a,x]$ 的变动部分, 而 $Q(a)$ 我们自然可设其等于 0. 显然, 上面所考虑的 "区间函数" 能以怎样方式用这 "点函数" $Q(x)$ 表出:

$$Q([\alpha,\beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

在我们各例中点函数是: 1) 变弧 $\widehat{AM}$, 2) 梯形 $AA'M'M$ 的变面积, 及 3) 这梯形的旋转体的变体积.

ΔQ 就是函数 $Q(x)$ 的增量, 而其主部 $q(x)dx$ 无非就是这个函数的微分. 如此, 以微分符号写出的等式 (3) 现在事实上就不是近似的而是精确的. 由此也就立即得出所求的结果:

$$\int_a^b q(x)dx = Q(b) - Q(a) = Q([a,b]) = Q.$$

可是我们要指出, 在应用上比较方便而有效的还是无穷小元素求和的观念 (莱布尼茨!) —— 连同所指的极限过程.

205. 旋转面面积 我们就第一个例来应用所说的程式以考虑一个几何问题 —— 旋转面面积的计算.

我们在此还不能以一般形式来建立曲面 (非平面) 面积概念. 这将在第二卷里讲. 目前我们只能学会计算旋转面的面积, 认为它是存在的并且是具有可加性的. 以后我们将知道, 所得到的公式可纳入一般曲面面积公式成为一个特例.

如此, 设我们在平面 xy 上 (就在上半个平面上) 有一条曲线 AB, 由

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{4}$$

这样的方程所给出. 这里 φ 及 ψ 是参变函数, 连同其导函数都是连续的. 为简单计设其为非闭曲线并无重点.

在当前情形宜取弧 s 作参变量而以点 $A(t_0)$ 作计算弧长的起点, 如此表达式化为

$$x = \Phi(s), \quad y = \Psi(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S), \tag{5}$$

这在 **202** 段已经讲到过. 这里如以 S 表全曲线 AB 之长, 则参变量 s 由 0 变到 S.

问题就是要来决定由曲线 AB 围绕 x 轴旋转所得曲面的面积 Q . 读者要注意, 这里 s 就是自变量, 其变化区间为 $[0,S]$.

如果分出曲线的元素 ds (图 90), 则可将它近似地看作是直线并且算出其相应面积元素 dQ 为以 ds 为母线以 y 及 $y+dy$ 为上下底半径的截圆锥面积. 于是按中学教程中的熟悉公式有

$$dQ = 2\pi\frac{y+(y+dy)}{2}ds.$$

但这还不是我们所需要的公式 —— 其两无穷小之积 $dy\cdot ds$ 须舍去. 我们得出一个对 ds 成一次式的公式

$$dQ = 2\pi y ds,$$

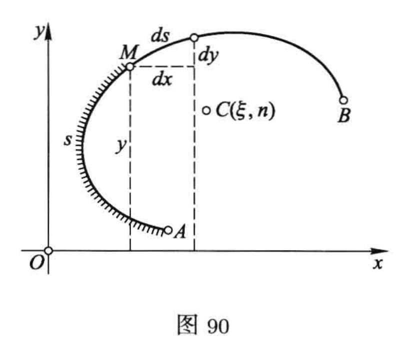


图 90

由此才可以求“总和”而终于得出

$$Q = 2\pi \int_0^S y ds, \tag{6}$$

这里 y 要理解为出现于 (5) 式的函数 $\Psi(s)$.

如果回到我们这曲线的一般参变式表示法 (4), 则在上列积分中作变量替换 [参看 **186** 段, (2)], 将它变成

$$Q = 2\pi \int_{t_0}^T y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 2\pi \int_{t_0}^T \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \tag{6a}$$

特例, 如果曲线由显式方程 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 所给出, 如此 x 成为参变量, 则我们将有:

$$Q = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y_x'^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{6b}$$

例 1) 试求球带的面积.

设有一个以原点为中心、以 r 为半径的半圆围绕 x 轴旋转, 由圆的方程我们有 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, 并且

$$y_x' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y_x'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad y\sqrt{1 + y_x'^2} = r.$$

在这情形, 端点横坐标为 x_1 及 $x_2 > x_1$ 的圆弧旋转所成的球带面积按公式 (6b) 为

$$Q = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

这里 h 是球带的宽 (高). 如此, 球带面积等于大圆周长与带宽之乘积.

特例, 在 $x_1 = -r, x_2 = r$ 时, 也即 $h = 2r$ 时, 我们得出整个球面的面积 $Q = 4\pi r^2$.

2) 试求旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 之弧旋转所成的面积.

既然 $y = 2a\sin^2 \dfrac{t}{2}, ds = 4a\sin\dfrac{t}{2}dt$, 则

$$Q = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du$$
$$= 16\pi a^2 \left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^3.$$

206. 曲线的静矩及质心的求法 大家知道, 一个质量为 m 的质点对一个轴的静矩 K 就等于质量 m 乘质点与轴的距离 d. 一组 n 个质量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的同平面质点, 其与轴的距离各为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$, 则其静矩由下面这个总和所给出:

$$K = \sum_i m_i d_i.$$

在此落在轴的一边的点的距离取正号, 另一边的点的距离取负号.

如果质量不是集中在个别的点上而是连续地分布在线上或平面图形上, 则此时表出静矩的和要代之以*积分*.

我们来讲沿某一平面曲线 AB 分布的质量对 x 轴的静矩 K_x 的定义 (图 90). 在此我们假设曲线是均匀的, 如此它的*线性密度* ρ (即单位长度上的质量) 是常数; 为简单起见我们甚至就让 $\rho = 1$ (在相反情形只需将所得结果乘以 ρ). 在这些假设之下曲线弧质量就直接以其长来量度, 而静矩概念乃获得纯几何的性质. 今后我们说到曲线的静矩 (或质心) 而不提其质量分布情况时, 则一般总指的是在所说假设之下来定义静矩 (或质心).

我们重新分出曲线的某一元素 ds (其质量也以 ds 一数来表出). 将这个元素近似地看作是一个质点, 与轴成距离 y, 如此得出其静矩表达式

$$dK_x = y ds.$$

把这些元素静矩都加起来, 而取弧 s 作自变量, 以点 A 作计算弧长的起点, 如此我们得到

$$K_x = \int_0^S y ds.$$

对 y 轴的矩也可以同样方式表出:

$$K_y = \int_0^S x ds.$$

当然, 这里假设 y (或 x) 是以 s 表出的. 实际上在这些公式里 s 则以曲线表达式中的自变量 t, x, 或 θ 表出.

有了静矩 K_x 及 K_y, 我们就容易确定其*质心* $C(\xi, \eta)$ 的位置. 点 C 具有这样的性质: 如果将曲线的全 “质量” S (此数也就表示曲线之长) 都集中于该点, 则该质点对任何轴的矩与全曲线对同轴的矩相等; 特别是, 如果考虑曲线对坐标轴的矩, 则我们求得

$$S\xi = K_y = \int_0^S x ds, \quad S\eta = K_x = \int_0^S y ds,$$

由此有

$$\xi = \frac{K_y}{S} = \frac{\int_0^S x ds}{S}, \quad \eta = \frac{K_x}{S} = \frac{\int_0^S y ds}{S}. \tag{7}$$

由质心纵坐标 η 的公式我们可得出一个奇妙的几何推论. 事实上, 我们有

$$\eta S = \int_0^S y ds,$$

由此得

$$2\pi\eta \cdot S = 2\pi \int_0^S y ds;$$

但这等式的右边是由曲线 AB 绕 x 轴旋转而得的曲面面积 Q [**205** 段, (6)], 等式左边的 $2\pi\eta$ 则表示该曲线质心绕同轴旋转时所描出的圆周之长, 而 S 为该曲线之长. 如此, 我们导致下面这个古尔丁定理①:

一曲线围绕一与它不相交的轴旋转, 如此所得旋转面的面积即等于该曲线弧长乘以该曲线质心 C 所描出的圆周之长 (图 90).

由这个定理可以决定曲线质心的坐标 η, 只要知道其长 S 及其旋转面面积 Q. 这里是几个这种例子:

1) 利用古尔丁定理来决定半径为 r 的圆弧 AB 的质心位置 (图 91).

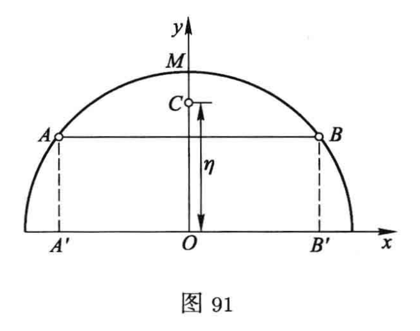


图 91

既然这弧对称于通过其中点 M 的半径 OM, 则其质心 C 即在这半径上, 而要完全决定质心的位置只要求出它与中心 O 的距离 η 就行了. 我们取定了轴, 如图所示, 并以 s 表弧 AB 之长, 而以 h 表其弦 $AB(=A'B')$. 由该弧绕 x 轴旋转得一球片, 其面积 Q 我们知道 [**205** 段, 1)] 等于 $2\pi rh$. 按古尔丁定理则该面积也等于 $2\pi\eta s$, 如此 $s\eta = rh$ 而 $\eta = \dfrac{rh}{s}$.

特例, 对于半圆则 $h = 2r, s = \pi r$ 而 $\eta = \dfrac{2}{\pi} r \approx 0.637r$.

2) 试决定这一支旋轮线的质心 (图 79):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

由对称性, 显然 $\xi = \pi a$. 于是由 **205** 段, 例 2) 容易得出: $\eta = \dfrac{4}{3}a$.

---

①保尔 · 古尔丁 (P. Guldin, 1577—1643) 是瑞士数学家, 但他的两个定理 (参看下段) 公元 3 世纪的杰出数学家巴普氏就已经知道了.

207. 平面图形的静矩及质心的求法 我们来看平面图形 $AA'B'B$ (图 92), 它上方由曲线 AB 所围, 这曲线则由显式方程 $y=f(x)$ 所给出. 我们假设沿此图形所分布的质量是均匀的, 如此其表面密度 ρ (即单位面积上的质量) 是一个常数. 不失一般性可认为 $\rho=1$, 即该图形任何部分的质量都可用其面积来量度. 今后单说平面图形的静矩 (或质心) 时恒作如此理解.

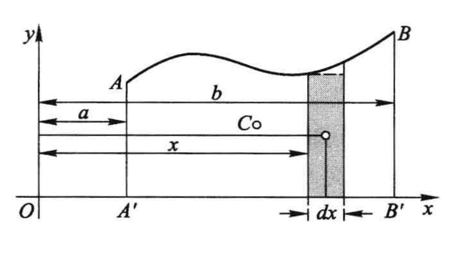


图 92

要决定这图形对坐标轴的静矩 K_x, K_y, 我们也按寻常方式分出这图形的一个无限窄的纵条面积元素 (参看附图). 把这窄条近似地看作矩形, 如此我们看出它的质量是 ydx (可用与面积相同的数值表出). 要决定相应的元素矩 dK_x, dK_y 我们假设全条的质量都集中在它的质心上 (即矩形的中心上), 如此我们知道并不改变静矩的大小. 所得质点与 x 轴相距 $\frac{1}{2}y$, 与 y 轴相距 $\left(x+\frac{1}{2}dx\right)$; 后一式可直代之以 x, 因为 $\frac{1}{2}dx$ 乘以质量 ydx 后将成一个二阶无穷小. 如此, 我们有

$$dK_x=\frac{1}{2}y^2dx,\quad dK_y=xydx.$$

把这些元素矩加起来, 结果得

$$K_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\quad K_y=\int_a^b xydx, \tag{8}$$

而 y 在此自然理解为一个出现于曲线 AB 的方程中的函数 $f(x)$.

也如曲线的情形一样, 现在依据这图形对坐标轴的静矩也就容易决定其质心的坐标 ξ,η. 如果以 P 表示该图形的面积 (所以也就是质量), 则根据质心的性质我们得出

$$P\xi=K_y=\int_a^b xydx,\quad P\eta=K_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,$$

由此有

$$\xi=\frac{K_y}{P}=\frac{\displaystyle\int_a^b xydx}{P},\quad \eta=\frac{K_x}{P}=\frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{P}. \tag{9}$$

在当前的情形我们也可以由质心纵坐标 η 的公式得出一个重要的几何推论. 事实上, 由这公式我们有

$$2\pi\eta P = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

这等式右边表示图形 $AA'B'B$ 绕 x 轴的旋转体的体积 V [**198** 段, (9)], 左边则表示此图形面积 P 与其质心所描出圆周长 $2\pi\eta$ 之乘积. 由此得出这第二古尔丁定理:

平面图形绕与它不相交的轴线所成旋转体的体积即等于该形面积与其质心所历圆周长之积:

$$V = P\cdot 2\pi\eta.$$

要注意公式 (8)、(9) 可推广到上下都由曲线所围的图形的情形 (参看图 75). 例如, 对这情形

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx, \quad K_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)dx; \tag{8a}$$

由此已经可以明白如何变换公式 (9). 如果回忆一下第 **196** 段的公式 (5), 则不难看出古尔丁定理对这情形也成立.

例 1) 试求抛物线 $y^2 = 2px$, x 轴及相应于横坐标 x 的纵坐标线所包围的图形的静矩 K_x, K_y 及质心坐标.

既然 $y = \sqrt{2px}$, 则按公式 (8)

$$K_x = \frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^x x dx = \frac{1}{2}px^2, \quad K_y = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{\frac{5}{2}}.$$

另一方面 [**196** 段, (4)], 面积

$$P = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

在这情形, 按公式 (9),

$$\xi = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8}y.$$

利用 ξ 及 η 的值不难按古尔丁定理来求当前这个图形绕纵坐标轴或终坐标线的回转体体积. 例如, 就后一情形而言, 既然质心与旋转轴的距离是 $\frac{2}{5}x$, 则所求体积为 $V = \frac{8}{15}\pi x^2 y$.

2) 试求一支旋轮线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 及 x 轴所包围的图形的质心.

利用 **196** 段, 4) 及 **198** 段, 2) 不难按古尔丁定理来决定 $\eta = \frac{5}{6}a$. 由对称性: $\xi = \pi a$.

208. 力功 设有一点 M 沿直线运动 (为简单计暂限于这种情形), 在该点上施一个定力 F 而使沿同一直线移动一段路程 s. 由力学原理读者知道, 此时该力之功 W 可表为乘积 $F\cdot s$.

但是常常有这样的情形: 力的大小并不保持常数而随点不断变化, 并且功的表出又要诉诸定积分.

设动点所经历路程 s 为自变量; 在此假设该点 M 的初始位置 A 相应于 $s = s_0$ 一值, 而终点 B 相应于 $s = S$ 一值 (图 93). 区间 $[s_0, S]$ 中每个值 s 都相应于动点的

一个一定的位置及 F 的一个定值, 如此, F 可以看作是 s 的函数. 取点 M 处于某一由路程的 s 值所决定的位置, 我们现在来求相应于路程由 s 至 $s+ds$ 的增量 ds 的功素的近似表达式, 此时点 M 移到了临近位置 M' (参看附图). 于位置 M 在该点上施以定力; 既然, 在 ds 很小时该点由 M 移至 M' 时 F 的变化也很小, 则我们不妨将 F 近似地看作常数而求得位移 ds 的功素表达式

$$dW = F \cdot ds,$$

如此全功 W 可由这个积分表出:

$$W = \int_{s_0}^{S} F ds. \tag{10}$$

图 93

例 我们举例来应用公式 (10) 以计算一端固定的弹簧被拉伸 (或压缩) 时的功 (图 94); 例如在火车厢缓冲器的计算中就遇到这类问题.

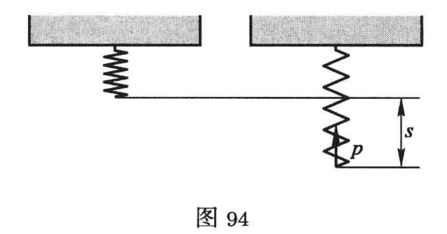


图 94

大家知道, 弹簧伸长 s (只要不拉扯过度) 所成张力 p, 其大小与伸长量成比例, 如此有 $p = cs$, 这里 c 是一个常数, 取决于弹簧的弹性 ("刚性"). 拉弹簧的力应胜过此张力. 如果只计算所施之力消耗于这上面的部分, 则伸长量由 0 增至 S 时其功可如此表出:

$$W = \int_0^S p ds = c\int_0^S s ds = \frac{cS^2}{2}.$$

设以 P 表示相应于弹簧伸长量的张力或克服它的力的最大值 (即等于 cS), 则我们可以把功表成这样:

$$W = \frac{1}{2} PS.$$

如果力 P 一下子施于弹簧的自由端 (例如悬一重物), 则其位移 S 产生两倍大的功 PS. 我们知道, 只有其一半耗费于弹簧的伸长, 另一半则化为弹簧及所悬重物的动能.

第十三章　微分学的一些几何应用

---

§1. 切线及切面

209. 平面曲线的解析表示法　本章只举例稍讲一些微分学的几何应用——并着重于平面上的情形. 这类应用的系统研究属于*微分几何学*范围, 而自成一个独立的数学科目.

首先我们重提一下平面曲线的各种解析表示法 (读者在解析几何里已学过), 在此假设以一个直角坐标系做基础①.

1°. 前面我们屡次提到过像

$$y = f(x) \quad [\text{或} \quad x = g(y)] \tag{1}$$

这样的方程并讨论过其相应的曲线. 这种一个流动坐标直接表为另一流动坐标的单值函数的曲线给出法叫做曲线的*显式给出法* (或表示法), 它特别简单而明了.

例子可取抛物线 $y = ax^2$.

2°. 但是, 在解析几何里曲线也常常用不对 x 或 y 解出的方程来给出:

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

这叫做曲线的*隐式方程*.

例　椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. 有时我们能把方程 (2) 的一个变量以另一个表出, 比如说 y 以 x 表出, 而将曲线 (或其一部分) 表为显式方程 (1). *例如*, 在椭圆的情形:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

---

①我们在此作一次*总的声明*: 凡本章所涉及的函数通常均假设其为连续的并对其自变量有连续导函数; 必要时我们甚至要求其有高阶的连续导函数.

在别的情形, 虽然 y 对 x (或 x 对 y) 的依赖关系由方程 (2) 所决定, 并在某些条件之下[①]存在有满足方程 (2) 的单值函数 (1), 甚至可以说这 "隐" 函数连续且有连续导函数, 但它的显式却写不出来. 例如, 笛卡儿叶形线就是这样的情形: $x^3+y^3-3axy=0$ (图 95).

3°. 前面讲过, 像

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{3}$$

这样确定点的流动坐标对某参变量 t 的依赖关系的方程也在平面上决定一条曲线. 这叫做*参变方程*; 它们给出曲线的*参变表示法*.

第一个例子是椭圆的参变表示法:

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t,$$

在参变量 t (其几何意义看图 96 就可明白) 由 0 变至 2π 时, 椭圆循逆时针方向被描出, 以长轴端点 $A(a,0)$ 为起点.

第二个例子是我们屡次提到过的旋轮线:

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t).$$

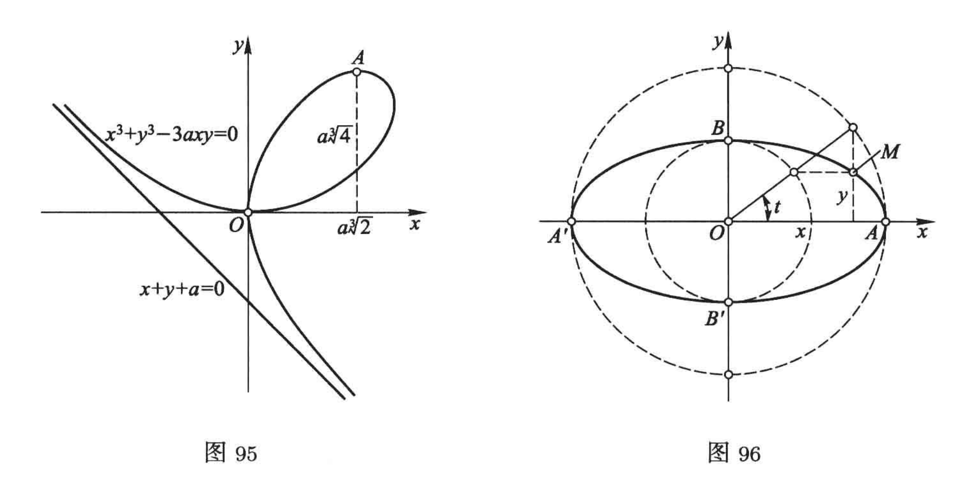


图 95　　　图 96

它就是一个圆沿一直线滚动时圆上一点所经历的轨线 (图 97). 这里做参变量的就是动半径 DM 与其原始位置 OA 间的角 $t=\angle NDM$. 在 t 由 0 变至 2π 时该点描出一段弧, 如图所示. 相应于 t 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 的全曲线则由无穷多段这种弧所组成.

210. 平面曲线的切线 切线这个概念我们已经屡次提到过 [例如见 **77** 段]. 一条由显式方程

$$y=f(x)$$

所给出的曲线在其每点 (x,y) 上都有一条切线, 其斜率 $\tan\alpha$ 由公式

$$\tan\alpha=y'_x=f'(x)$$

①参看第二卷第十九章.

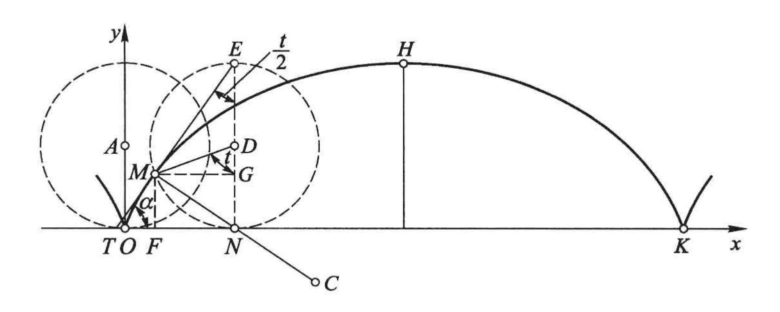


图 97

给出. 如此, 切线的方程有这样的形式:

$$Y - y = y'_x(X - x). \tag{4}$$

这里 (及以下) X, Y 都表示流动坐标, 而 x, y 表示切点的坐标.

通过切点与切线垂直的所谓*法线*, 其方程也不难求得如下:

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x)$$

或

$$X - x + y'_x(Y - y) = 0. \tag{5}$$

我们来看几个与切线及法线相关的线段 —— 即线段 TM 及 MN 以及其在 x 轴上的投影 TP 及 PN (图 98). 后两个各叫做*次切线*及*次法线*而以 *sbt* (subtangens) 及 *sbn* (subnormal) 表之. 在方程 (4) 及 (5) 中设 $Y = 0$, 不难算出

$$sbt = TP = \frac{y}{y'_x}, \quad sbn = PN = yy'_x. \tag{6}$$

图 98

例 1) 对于抛物线 $y = ax^2$ 我们有:

$$sbt = \frac{y}{y'_x} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

这是一个我们已经知道的结果 (参看 **77** 段的脚注).

现在我们来看方程 (2) 所表示的曲线隐式表示法. 如果假设这方程在我们所关心的点的邻近等价于一个像 (1)①那样的方程, 则曲线在这个点上显然有一条切线 (4). 在第 **141** 段, 4) 我们已经会把 “隐函数”(它是不直接知道的) 的导数 y'_x 以已知的导数 F'_x 及 F'_y 表出; 即我们有

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

①也参看第二卷第十九章.

这里假设 $F'_y \neq 0$. [顺便指出, 这恰好就是使方程 (2) 在曲线的所考虑的点邻近等价于 (1) 式方程的条件.] 将所求得 y'_x 的表达式代入切线方程, 经简单变化后就得到这个方程式:

$$F'_x(x,y)(X-x)+F'_y(x,y)(Y-y)=0. \tag{7}$$

既然这个方程对 x 和 y 是完全对称的, 显然 x 与 y 交换后也得出同一个切线方程, 只是这回要假设 $F'_x \neq 0$. 只要在所考虑的点上两个导数 F'_x 及 F'_y 同时等于 0, 等式 (7) 就成一恒等式, 并且不复成一确定的直线的方程了. 在这情形点 (x,y) 叫做曲线的奇点; 在奇点上曲线实际不能有确定的切线.

例 2) 抛物线: $y^2=2px$ (图 99). 把 y 看作 x 的函数而将此等式求导, 得 $yy'_x=p$. 如此 [参看 (6)], 抛物线的次法线是一个常数. 由此我们有了一种求作抛物线的法线以及切线的简单方法.

但是, 在这情形次切线也可简单地表出 —— 只要将抛物线方程两边以刚才所得等式除之, 立即得出:

$$\frac{y}{y'_x}=2x \quad 即 \quad sbt=2x.$$

3) 椭圆: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (图 100).

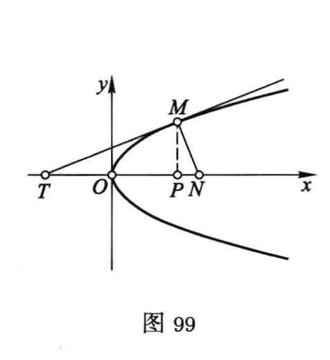


图 99

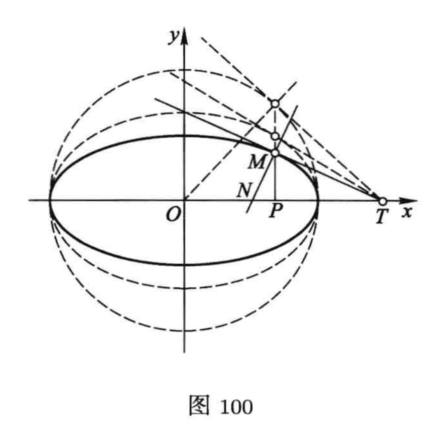


图 100

按公式 (7) 我们有这样的切线方程:

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0.$$

结合椭圆方程, 我们可将此切线方程化为更简单的形式:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

在此令 $Y=0$, 我们求得 $X=\dfrac{a^2}{x}$. 如此, 切线与 x 轴的交点 T 与 y 无关, 也与 b 无关. 相应于种种 b 值的各椭圆, 其在横坐标同为 x 的点上的切线全都通过 x 轴上的同一个点 T. 既然在 $b=a$ 时得一个圆, 它的切线是很容易画的, 则点 T 立即可以定出, 而由此导出椭圆切线的一种简单作法, 看图 100 就可明白.

4) 对于笛卡儿叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ 方程左边两个偏导数

$$3(x^2-ay) \quad 及 \quad 3(y^2-ax)$$

在坐标原点上同等于 0; 由图 95 可看出, 该曲线在这个奇点上的确没有确定的切线.

最后, 我们来讨论由参变方程 (3) 所给出的曲线. 如果在所取的点上导数 $x'_t=\varphi'(t)$ 异于 0, 比如说大于 0, 则它在这点邻近的值也是正的; 这就是说, 函数 $x=\varphi(t)$ 是单调增的 [**111** 段], 于是 t 也就是 x 的增函数: $t=t(x)$ [**71** 段], 其导函数为 $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$ [**80** 段]. 以这 x 的函数替代方程 $y=\psi(t)$ 中的 t, 我们就得出在曲线的某小区域内 y 成 x 的函数:

$$y=\psi(t(x))=f(x),$$

它也有导函数. 如此可见, 在接近所取那个点的地方, 曲线的一段也能以显式方程表出: 在这情形该点上有切线.

切线的斜率可表出如下:

$$\tan\alpha=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

将此式代入切线方程 (4), 我们不难把它化为比例形式:

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}. \tag{9}$$

但是, 两边的分母常常乘以 dt 而将切线方程写成这样:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}. \tag{10}$$

如果我们在所取的点上导数 $y'_t=\psi'(t)$ 异于 0, 则 x 和 y 交换后可得出同一个切线方程. 只有在所给点上两个导数 x'_t 及 y'_t 同时等于 0 时我们的论证才不适用. 这种点也称为曲线的奇点: 在这种点上可以没有切线. 恰好这时候方程 (9) 或 (10) 也就失去了意义: 两个分母都成 0.

5) 举个例, 我们来考察旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ (图 97) 的切线作法问题. 在这情形我们有

$$x'_t=a(1-\cos t), \quad y'_t=a\sin t,$$

如此相应于 $t=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的都是奇点. 除去这些点以外, 按公式 (8),

$$\tan\alpha=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

并且可以取 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}$.

我们记得 (图 97), $t = \angle MDN$, 如此 $\angle MEN = \frac{t}{2}$. 如果延长直线 EM 使与 x 轴相交于 T, 则 $\angle ETx = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$. 所以, 联结旋轮线上一点与相应位置滚动圆的最高点的直线 ME 也就是切线. 由此显然, 直线 MN 就是法线.

法线被截于 x 轴的一段 n 的表达式今后对我们将有用处, 它容易由直角三角形 MEN 得出. 即

$$n = MN = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

这次在奇点上切线也是存在的 —— 它们平行于 y 轴; 但是对于这些点的切线而言曲线的形态是不寻常的: 有尖 (“尖点”).

211. 切线的正方向 以前我们只凭斜率 $\tan\alpha$ 来决定曲线的切线位置, 而不分辨切线本身的两个相反的方向: $\tan\alpha$ 对这两个方向是一样的. 但是, 在某些研究中表现出有确定一种方向的必要.

我们想象有一条曲线, 由参变方程 (3) 所给出, 并且来考虑它的一个 “寻常” 点, 即非奇点. 在这个点上, 如我们在 **202** 段已看到, 存在导数

$$x'_s = \frac{dx}{ds}, \quad y'_s = \frac{dy}{ds},$$

而

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \tag{11}$$

这不难由基本关系

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

除以 ds^2 得出 [**202** 段, (6)].

在渡向标题所列问题的本质之先, 我们来建立一个引理, 它以后对我们将有用处.

引理 *设 M 是曲线的一个寻常点 (图 101). 如果以 M_1 表示同一曲线的一个变动点, 则在 M_1 趋于 M 时 MM_1 弦长与 $\overset{\frown}{MM_1}$ 弧长之比将趋于 1:*

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1. \tag{12}$$

我们取弧作参变量, 并设点 M 相应于弧值 s, 而 M_1 相应于 $s + \Delta s$. 更设该二点的坐标分别为 x, y 及 $x + \Delta x, y + \Delta y$. 于是 $\overset{\frown}{MM_1} = |\Delta s|$, 而 $MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 如此

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

右边取 $\Delta s \to 0$ 时的极限, 按 (11) 我们就可得出所求的结果.

如此, 在所说条件下无穷小的弦和弧成为等价的.

现在设在所考虑的曲线上取定了原点及计弧的一定方向; 我们仍取弧作参变量, 以决定曲线上点的位置.

设所论的点 M 相应于弧 s. 如果赋 s 以正的增量 Δs, 则弧 $s+\Delta s$ 决定一个新的点 M_1, 落在弧增大之侧. 我们赋割线以 M 至 M_1 的方向并且以 β 表示割线的这个方向与 x 轴正向所成的角. 将线段 MM_1 投影到坐标轴上 (图 101), 按一个熟悉的投影定理我们得

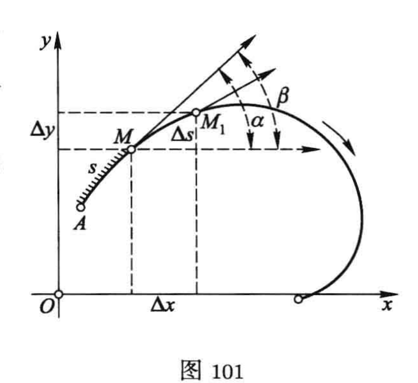


图 101

$$投影_x MM_1 = \Delta x = MM_1 \cos\beta,$$
$$投影_y MM_1 = \Delta y = MM_1 \sin\beta,$$

由此有

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{MM_1}.$$

既然 $\widehat{MM_1} = \Delta s$, 则这些等式可以写成这样:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\widehat{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\widehat{MM_1}}{MM_1}. \tag{13}$$

我们称切线沿弧增大之侧的方向为正向, 说精确点, 这正向的定义是: 如前面所说那样规定了方向的射线 MM_1 在 $\Delta s \to 0$ 时的极限位置就是切线的正向. 如果以 α 表示切线正向与 x 轴正向间所成之角, 则由 (13) 及 (12) 我们取极限得出

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{14}$$

这两个公式除 $2k\pi$ 不计外 (k 为整数) 已决定了角 α, 所以的确由切线的两个可能方向中定出其一, 这就是正向.

212. 空间曲线 这情形我们只简略地提一提, 因为与平面曲线完全相似.

也如平面上一样, 空间曲线的变动点的坐标可以用一个参变量 t 的函数来给出:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{15}$$

在 t 变化之下这些方程所给出的坐标上的点就描成该曲线.

在空间曲线 (15) 的情形, 切线的决定法仍然与平面曲线一样, 我们除去导数 x'_t, y'_t, z'_t 同时为 0 时的曲线奇点不予考虑, 而取曲线的任一个常点 $M(x,y,z)$, 它相应于参变量 t. 赋 t 以增量 Δt, 于是参变量增大后之值 $t+\Delta t$ 将相应于另一点 $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. 割线 MM' 的方程将成这个样子:

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y} = \frac{Z-z}{\Delta z},$$

这里 X, Y, Z 是流动坐标. 这些方程分母一律除以 Δt 后其几何意义仍不变:

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

如果这些方程在 $\Delta t \to 0$ 时的极限情形仍保持一定的意义, 则由此确定了割线的极限位置, 即切线.① 但取极限我们得

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{16}$$

而这些方程只要分母不全为 0 时, 就的确表示一条直线. 如此, 在每个寻常点上曲线总有切线, 而由这些方程所表出. 对于奇点则切线尚成问题.

有时方程 (16) 便于写成

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{17}$$

它是由 (16) 分母遍乘 dt 而得.

如果以 α, β, γ 表示切线与坐标轴间所成之角, 则方向余弦可表示成这样:

$$\cos\alpha=\frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}.$$

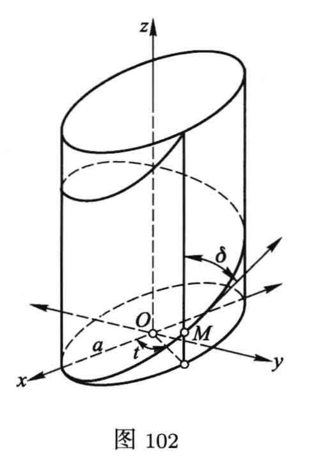


图 102

根号前正负号的选择就取决于切线方向的选定.

举一个例, 我们来看螺旋线 (图 102)

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ct.$$

在这情形

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=a\cos t,\quad z'_t=c,$$

而切线方程如下:

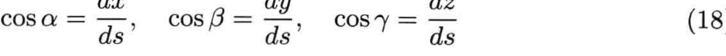
$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}.$$

切线的方向余弦是:

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

注意, 这里 $\cos\gamma$ 是常数, 所以 γ 也就是常数. 如果设想螺旋线缠绕在直圆柱面上, 则可以说, 螺旋线与圆柱的所有母线都相交成一个定角 δ.

对于空间曲线, 也如平面曲线一样, 可以取弧 s 作参变量以决定点的位置, 而弧是由任意选定的原点沿一定的方向来计算的. 切线的正方向就选取弧增大之侧的方向. 对于寻常点而言则切线正向的方向余弦可表出如下:



$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds} \tag{18}$$

[参看 **211** 段].

①我们取了 $\Delta t \to 0$ 时的极限, 但可证明这就等价于所谓比较几何意味的命题 $MM_1 \to 0$.

213. 曲面的切面 我们已经处理过 [**124 段**] 由下列方程所给出的曲面:

$$z = f(x, y); \tag{19}$$

这就是曲面的显式给出法[①]. 在解析几何里曲面常常以隐式方程来给出:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{20}$$

而不对任何一个变量解出.

例 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (椭圆面), $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (二次锥面).

也如平面曲线隐式给出法的情形一样, 在某些条件之下[②], 这里方程 (20) 也成为等价于 (19) 式那样把一个坐标表为其余两个变量的函数的方程 (这函数具有连续偏导函数), 哪怕这函数的显表达式我们并不能知道.

设 $M(x, y, z)$ 是曲面 (20) 上的任一点. 通过 M 沿曲面作一条任意的曲线而在所指定的点上作此曲线的切线; 这种曲线 (及其切线) 有无穷之多.

通过点 M 沿曲面画种种曲线, 如果这些曲线在点 M 的切线全都落在一个平面上, 则这个平面叫做该曲面在点 M 的切面, 这里点 M 叫做切点.

沿曲面 (20) 所作曲线一般可设想其能以 (15) 那样的方程解析地表出. 既然该曲线的全体点都假设是落在曲面上的, 则在方程 (20) 里的 x, y, z 各以函数 φ, ψ, χ 替代时该式必化为参变量 t 的恒等式. 依 t 微分此恒等式 [利用 (一阶) 微分不变式, 第 **143 段**], 得

$$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0, \tag{21}$$

这里可以特别取切点 M 的坐标 x, y, z 作为函数 F'_x, F'_y, F'_z 的自变量, 而 dx, dy, dz 应理解为在相应 t 值上函数 (15) 的微分. 另一方面, 该曲线在点 $M(x, y, z)$ 的切线可用方程式 (17) 表出, 其中 X, Y, Z 为流动坐标, 而 dx, dy, dz 同刚才所说的一样. 将 (21) 中的 dx, dy, dz 代之以 (17) 式中成比例的差数 $X - x, Y - y, Z - z$, 我们终于得出等式

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0, \tag{22}$$

它对定义中所说任何切线的所有点 z 都是成立的. 如果在点 M 导数 F'_x, F'_y, F'_z 至少有一个是异于 0 的, 则等式 (22) 就表示一个平面的方程, 它就是切面.

当在所考虑的点上同时有

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0$$

的例外情形 (这种点叫做奇点), 等式 (22) 就成一恒等式, 而此时切面就不能存在了.

---

①当然这里 z 的特殊地位是偶然的; 曲面的显式给出也可以由这样的方程来表示: $x = g(y, z)$ 或 $y = h(z, x)$.

②参看第二卷第十九章.

例 1) 椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

依据公式 (22) 及椭圆面方程本身得出切面方程如下:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

2) 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

其切面为

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

在锥面顶点 $(0,0,0)$ 这个奇点上, 此方程失去意义, 而切面不存在.

曲面的法线的方向余弦显然是 (所谓法线就是切面在切点上的垂直线):

$$\cos\lambda=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},\quad \cos\mu=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\nu=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

显式方程 (19) 改写成了

$$z-f(x,y)=0$$

的形式则可看作方程 (20) 的一个特例. 如果采用标准写法

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=q,$$

则对这情形切面方程 (22) 可写成这样:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{23}$$

而法线的方向余弦成为

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

§2. 平面曲线的曲率

214. 凹向 · 拐点 我们来考虑一条平面曲线及它上面的一个点, 曲线就算是由显式方程 $y=f(x)$ 所给出吧, 如此该点可设为

$$M(x_0,f(x_0)).$$

如果在点 M 的充分小邻域内曲线的所有点 z 都落在切线的某一侧, 则我们说, 在点 M 曲线凹向切线该侧 (图 103). 一个点如果在充分小邻域内横坐标 $x < x_0$ 时曲线落在切线一侧, 横坐标 $x > x_0$ 时落在另一侧, 则该点称为拐点. 换句话说, 如果在点 M 曲线由切线一侧渡向另一侧, 或简单点说, 曲线与切线交叉 (图 104), 则称该点为拐点.

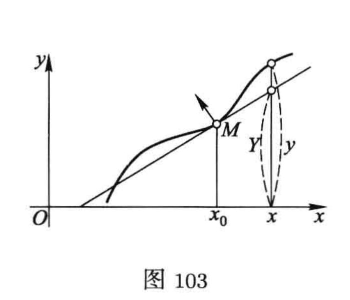


图 103

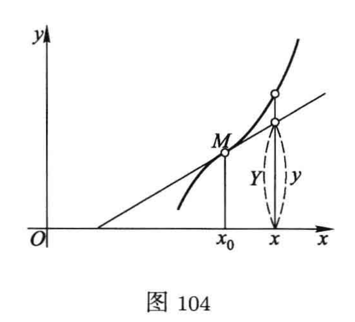


图 104

既然在点 M 的切线方程为

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)^{①},$$

则为了解决凹向问题或拐点存在问题须考察差数

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

在点 x_0 邻近的正负号, 我们假设在这邻近存在二阶连续导数 $f''(x)$.

先设 $f''(x_0) \neq 0$. 应用带佩亚诺型余项的泰勒公式 [**107** 段, (17)] 而取 $n = 2$ 我们得:

$$y - Y = \frac{f''(x_0) + \alpha}{2!}(x - x_0)^2,$$

这里 $x \to x_0$ 时 $\alpha \to 0$. 对充分接近 x_0 的 x 值这个差数保持 $f''(x_0)$ 的正负号, 所以, 在 $f''(x_0) > 0$ 时曲线在点 M 凹向上, 而在 $f''(x_0) < 0$ 时, 凹向下.

如果 $f''(x_0) = 0$, 则右边只剩一项 $\frac{\alpha}{2}$, 它与差数 $y - Y$ 同正负号. 在这情形我们取拉格朗日形式的余项 [**106** 段, (12)] 并且也是取 $n = 2$ 的情形:

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

这里或者 $x < c < x_0$, 或者 $x_0 < c < x$. 如果在 x_0 近处二阶导数 $f''(x)$ (左边及右边都是) 保持正号或负号, 则差数 $y - Y$ 也就保持同一符号, 并且在点 M 各凹向上或向下.

---

①我们在此采用了与 **210** 段不同的表示法 [参看 (4)]. 但以前我们用 Y 表示切线上流动点纵坐标是为了与曲线上同横坐标 x 的点的纵坐标 $y = f(x)$ 有所区别.

反之, 如果 $f''(x)$ 在通过点 x_0 时变号, 则差数 $y-Y$ 也变号, 而在点 M 有一拐点. 在这情形点 M 就其充分小邻域而言看来把那些曲线凹向上的点与凹向下的点分开. ①

例如我们来看这正弦线: $y=\sin x$; 这里 $y''=-\sin x=-y$. 所以, 在 $\sin x$ 保持正号 (负号) 的区间内正弦线凹向下 (上). 对 $x=k\pi$ (k 为整数) 这样的值 y'' 等于 0, 而在此变号; 其相应点即正弦线的拐点. 反之, 对于函数 $y=x^4$ 我们有 $y''=12x^2$, 并且虽然在 $x=0$ 时二阶导数等于 0, 但在其他 x 值它却保持正号, 而曲线到处是凹向上的.

对于拐点的存在 (如果假设二阶导数存在) $y''=0$ 这一条件是**必要**的但不**充分**.

在这一点不难看出其与极值理论相似之处 [参看 **112** 段及后面].

最后我们说, 对于拐点也可以不考察二阶导函数 $f''(x)$ 在点 x_0 邻近的正负号而考察在点 x_0 本身的逐阶导数值 $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \cdots$. 既然这里有关的论证完全与 **117** 段相似, 故留给读者自己去考虑.

注 拐点上曲线的考察能使函数的作图比 **115** 段所说更为精密化.

215. 曲率概念 我们来考察由参变方程

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{1}$$

所给出的无重点、无奇点的曲线弧. 如果在其每点上作一条切线 (比如说是正向的), 则由于曲线的 "弯曲" 这切线将随切点的变动而旋转; 这正是曲线与切线处处保持同一方向的直线 (与切线重合) 的差别所在.

表现曲线变化特征的重要因素就是这个在其各点上的 "弯曲度" 或 "曲率"; 这曲率可以用数表出.

设 $\widehat{MM_1}$ (图 105) 是曲线弧; 我们来看弧两端所作切线 MT 及 M_1T_1 (正向的), 这是比较自然的, 曲线的曲率以其单位弧长上切线的旋转角来表出, 即以比率 $\dfrac{\omega}{\sigma}$ 来表出, 这里角 ω 以弧度为量度单位, 而 σ 以选定的长度为单位. 这个比率叫做曲线弧的**平均曲率**.

在曲线的不同部分其平均曲率一般是不同的. 但是有一种唯一的曲线, 它的曲率却到处都一样: 这就是圆②. 事实上, 对它我们恒有 (图 106)

$$\frac{\omega}{\sigma}=\frac{\omega}{R\omega}=\frac{1}{R},$$

不论是指哪一段圆弧而言.

由弧 $\widehat{MM_1}$ 的平均曲率概念我们可导出在一点的曲率.

所谓**曲线**在点 M 的**曲率**乃指点 M_1 沿曲线趋于 M 时弧 $\widehat{MM_1}$ 的平均曲率的极限.

---

①有时这个性质被取作拐点定义的基础. 这种定义不完全等价于本书所给的定义.

②自然不算直线, 它的曲率到处是零.

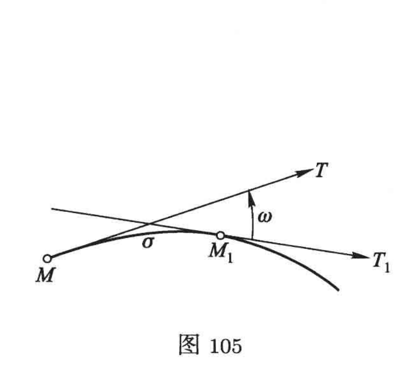


图 105

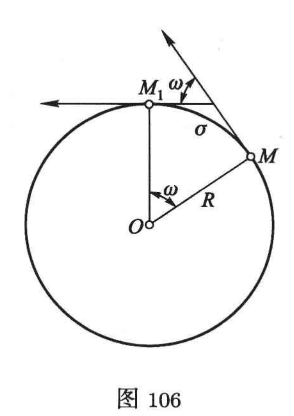


图 106

以字母 k 表示曲线在某定点的曲率, 我们有

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma}.$$

对于圆显然有 $k = \dfrac{1}{R}$, 即圆的曲率是其半径的倒数.

注 平均曲率概念和定点曲率概念完全与运动点的平均速度和瞬间速度概念相类似. 我们可以说, 平均曲率表示某一段弧上切线方向变化的平均速度, 而点上曲率则表示切线方向在某定点的真正变化速度.

现在我们来推导曲率的解析表达式, 可依此计算其值. 这里由曲线的参变式给出法出发.

我们先把弧长当作参变量. 在曲线上取一常点 M, 并设其相应于弧值 s. 赋 s 一任意增量 Δs 而得另一点 $M_1(s+\Delta s)$ (图 107). 由 M 变至 M_1 时切线倾斜角的增量 $\Delta\alpha$ 就是两切线间的角 $\omega = \Delta\alpha$, 既然 $\sigma = \Delta s$, 则平均曲率等于 $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

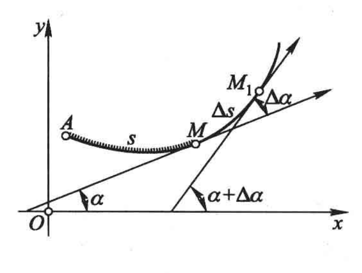


图 107

让 $\widehat{MM_1} = \Delta s$ 趋于 0, 我们得出曲线在点 M 的曲率的解析表达式

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{2}$$

要注意的是这个公式的精确性还差一个正负号. 因为曲率按我们所下定义应为非负之数, 而上式右端则可得负值. 问题就在 $\Delta\alpha$ 及 Δs 都可以是负的. 因此严格说来我们应该写 $\omega = |\Delta\alpha|, \sigma = |\Delta s|$ 而终于有

$$k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

这几句话此后要记在心里.

为了使公式 (2) 成一便于直接进行计算的形式 (同时也可确定曲率本身的存在), 这里我们假设曲线参变式 (1) 的函数 φ 及 ψ 有二阶的连续导函数.

如果所考虑的点 $M(t)$ 是寻常点, 则不失一般性可认为即 $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$.

现在公式 (2) 可有另一写法如下:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'_t}{s'_t}. \tag{3}$$

但 $s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}$ [**202** 段, (5)], 故只剩下来求 α'_t. 因为 [**211** 段, (8)]

$$\tan\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{而} \quad \alpha = \arctan\frac{y'_t}{x'_t},$$

则

$$\alpha'_t = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t + y'^2_t}. \tag{4}$$

以 s'_t 及 α'_t 值代入 (3) 式得此最后公式:

$$k = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}. \tag{5}$$

这公式完全适于计算, 因为其中导数都容易按曲线的参变方程算出.

如果曲线是由显式方程 $y = f(x)$ 给出的, 则此公式成这样形状:

$$k = \frac{y''_{x^2}}{(1+y'^2_x)^{3/2}}. \tag{5a}$$

最后, 如果曲线是由极坐标方程所给出的: $r = g(\theta)$, 则可如寻常方式取 θ 作参变量而变为直角坐标的参变表达式. 于是由 (5) 得出

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_{\theta^2}}{(r^2 + r'^2_\theta)^{3/2}}. \tag{5b}$$

216. 曲率圆及曲率半径 在许多研究中我们便于将曲线所考虑之点邻近部分近似地代之以圆, 而与原曲线该点有相同的曲率.

所谓曲线在其一点 M 的**曲率圆**乃指这样的一个圆[①]:

1) 它切该曲线于点 M;

2) 在此点它与原曲线凹向同一侧;

3) 它与原曲线点 M 有相同的曲率 (图 108).

曲率圆的中心 C 简称为曲率中心, 而此圆半径则称为 (曲线在该点的) 曲率半径.

[①]本书按习惯 “圆” 字也用作与 “圆周” 同义.

由曲率圆定义可以看出, 曲率中心恒在曲线该点的法线凹侧上. 如果曲线在该点的曲率表以 k, 则既然对于圆我们有 $k=\dfrac{1}{R}$ [**215** 段], 现在对于曲率半径我们显然就有

$$R=\frac{1}{k},$$

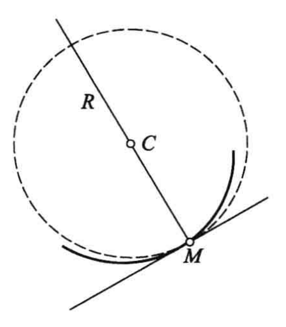


图 108

利用前段所导出的曲率公式, 我们立即可写出一系列曲率半径公式如下:

$$R=\frac{ds}{d\alpha}, \tag{6}$$

$$R=\frac{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}{x_t'y_{t^2}''-x_{t^2}''y_t'}, \tag{7}$$

$$R=\frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y_{x^2}''}, \tag{7a}$$

$$R=\frac{(r^2+r_\theta'^2)^{3/2}}{r^2+2r_\theta'^2-rr_{\theta^2}''}, \tag{7b}$$

分别可应用于相应的情形.

这里也适用 **215** 段关于曲率表达式所说正负号的话.

但是, 正负号问题也可以用几何方式来作解释, 就看曲率半径应在 (照 **211** 段为正向的) 切线的哪一侧沿法线截取. 也就是, 在坐标轴的寻常布置法之下曲率半径的正号就表示它指向切线的左边, 负号就表示指向右边[①]. 这在曲线以显式给出时特别容易验证, 因为这时候 [参看 (7a)] 曲率半径的正负号与 y_{x^2}'' 的正负号一致, 而后者我们知道 [**214** 段] 正足以决定曲线应凹向切线的哪一侧 (同时也就决定曲率半径的指向).

例 1) 试决定这旋轮线的曲率半径: $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ (图 97).

既然 [**210** 段, 5)] $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}$, 则 $d\alpha=-\dfrac{1}{2}dt$; 另一方面 [**201** 段, 2)], $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=2a\sin\dfrac{t}{2}$, 即 $ds=2a\sin\dfrac{t}{2}dt$. 在这情形要计算 R 可以利用基本公式 (6):

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{2a\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt}=-4a\sin\frac{t}{2}.$$

由 **210** 段, 5) 所导出法线截于 x 轴一段 n 的表达式, 我们看出

$$R=-2n.$$

由此曲率中心 C 的作法就可由图一目了然.

①在此要记得, 弧在正方向是相应于参变量 $(t, x$ 或 $\theta)$ 的增长来计算的.

2) 最后我们来谈一谈一个实际问题, 这里面所用到的正好本质上就是沿曲线的曲率变化: 所指的是在铺设铁路弯道时所用的所谓*过渡曲线*.

如力学上所建立, 一个质点沿曲线运动时产生离心力, 其大小由公式

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

所决定, 这里 m 是质点的质量, v 是它的速度, 而 R 是曲线在该点的曲率半径.

如果铁路的直线部分直接连接到成圆弧的弯道 (图 109(a)), 则在过渡到这弯道上时将瞬息间一下子发生了离心力, 而引起急剧强烈的冲撞. 这对于车厢及道路上层结构都是有伤害的. 为了避免这种情形, 路的直线部分与圆弯道之间借助某种*过渡曲线*来联结 (图 109(b)). 沿着该曲线曲率半径由 (与直线部分衔接之处的) 无穷大*逐渐*减至 (与圆弧衔接之处的) 该圆半径的大小, 而离心力也就相应地逐渐慢慢增长起来.

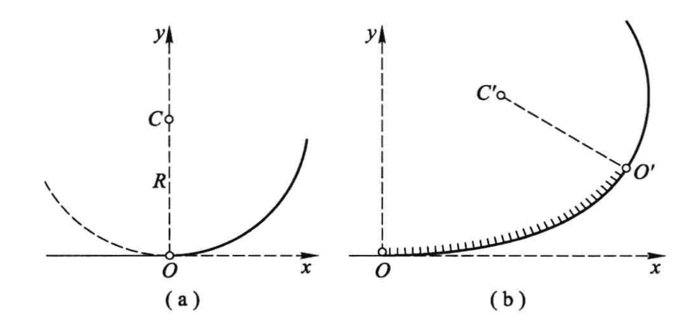


图 109

过渡曲线, 例如, 可采用三次抛物线 $y = \frac{x^3}{6q}$. 在这情形我们显然有

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

如此得出曲率半径的表达式

$$R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

在 $x = 0$ 时我们有 $y' = 0$ 而 $R = \infty$, 故该曲线在坐标原点与 x 轴相切而其曲率为 0.

第十四章　数学分析基本观念发展简史

§1. 微积分前史

217. 17 世纪与无穷小分析　这是一个由中世纪过渡到新时代的时期, 资本主义开始发展, 而它在其与封建制度的斗争中代表了进步的力量. 精确科学由当时的生活得到了迅速发展的动力. 航海学引起了对天文学及光学的高度兴趣, 造船学、堤坝及运河的建修、机器制造和建筑、弹道学问题及一般的军事方面的问题等, 促进了力学的发展. 而天文学、光学、力学以及, 直接地, 工业技术本身, 又要求对当时的数学作彻底的革新.

这种革新的标志是*变量*的引入, 恩格斯很恰当地称它为 "数学中的转折点" (参看 **14** 段中所引证). 只有变量的数学才能适应数理自然科学的需要. 新的问题导向新的 "无穷小" 量研究法 (或 "无限小" 方法) 的建立. 接近该世纪之末, 成为一门独立的学科的数学分析, 也就因此而得到 "无穷小分析" 的名称, 至今都还沿用.

起初在这领域内大半可以说是 "手工业生产": 建立每种个别的事实都要研究者采取特殊办法. 但情况随着时间渐渐改变了. 终于出现了一般的方法来解同类型的问题, 建立了各类问题间的联系. 逐渐阐明了作为这些问题求解的基础的一般概念, 而所有这些乃辉煌地在牛顿和莱布尼茨手中由微积分学的创立所完成.

在第一节里我们来综述一下, 在五十来年时间内给这项发明作了准备的, 至少是两代数学家的成就.

218. 不可分素方法　我们由*积分学的前史*开始, 这实际上要回溯到遥远的古代; 至于讲到面积和体积的计算以及图形重心的定位, 则这方面 17 世纪数学家的真正祖师是阿基米德 (公元前 3 世纪).

在保有到现代的 "阿基米德致依拉托斯芬书"[①] 里说到, 他以特殊方法得出了他自己的结果 (属初级), 其中形式上利用了杠杆平衡理论, 但本质上含有*由线组成平面图形、由平面组成立体的*

[①]有俄文译本 "Новое сочинение Архимеда" (《阿基米德新集》) (Odecca, Mathesis, 1909).

思想. 由这种"原子论"方法所找到的真理后来连同其严格的、当时惯用的反证法发表了出来. 但这"书信" 17 世纪的数学家是不知道的 —— 两千年间该信被认为散佚, 直到 20 世纪初才完全偶然地被发现. 如此, 在 17 世纪时, 对于阿基米德曾用来发现他的结果的方法只能由其文集中其他保留下来的部分来猜度. 在集中别处没有遗留得出他的结果时实际所用方法的任何痕迹. 但在某些作品中运用反证法时, 阿基米德仍然把平面图形 (或立体) 分解为元素, 不过, 取成有限的个数并且有限的宽度; 在此他也考虑了内接及外接阶梯状图形 (或方体), 这就是我们的积分和的几何原形.

第一个试图来阐明阿基米德方法并推广其应用范围的是德国天文学家兼数学家开普勒 (Johannes Kepler, 1571—1630). 他在 1615 年出了一本书叫做《酒桶的新立体几何》[①]. 虽然这著作是以偶然的理由并且以看来非常实际的题材写的, 但其中含有当时对求方及求立方 (求面积及体积) 问题的新途径: 将平面图形分解为无限多无穷小元素, 然后由这些元素 —— 必要时予以变形 —— 组成面积已知的新图形 (对立体也一样).

我们指出, 刚才说的开普勒的元素不是完全没有宽度的: 他说到了所谓"纤细的小圈"或"宽度极小如线的部分"等等.

开普勒以这样的方法先得出了阿基米德的一系列结果的直接推导 (不是反证法), 然后在其标题为"对阿基米德的补充"的部分标出了 87 种新的旋转体的体积.

开普勒观念的承继者及"不可分素方法"本身的奠基者是卡瓦列里 (Bonaventura Cavalieri, 1598—1647), 他是伽利略 (Galileo) 的学生, 一位意大利学者兼牧师. 这种方法的传播也成了他的终身事业. 1635 年他出版了他的主要著作《几何学的不可分连续新讲法》, 后来在 1647 年又补充了《几何六试》[②]. 在这两种著作里本质上复活了阿基米德的原子论观点.

"要决定平面图形的大小, 卡瓦列里说, 可应用一系列平行线, 我们设想其在这些图形上画了无穷之多" (图 110). 他以同样方式处理了立体, 只是在那里不画直线而代之以平面. 这些直线 (平面) 就是声名远播的"不可分素"; 它们"为数无穷并且没有一点宽度" (在这一点卡瓦列里与开普勒相反). 但卡瓦列里没有断然肯定图形或体是由这些无宽度的不可分的元素所组成的. 他的主要原则陈述得比较审慎: "平面图形 (或立体) 与其全体不可分素成比例". 例如, 倘若平行四边形 $ABCD$ (图 111) 以其对角线 AC 分为两个三角形, 并且设想其中有一些平行于底边 CD 的直线, 则"平行四边形的所有 (OR) 线"与"三角形的所有 (QR) 线"成 2:1 的比例, 因为这是平行四边形面积与三角形面积之比.

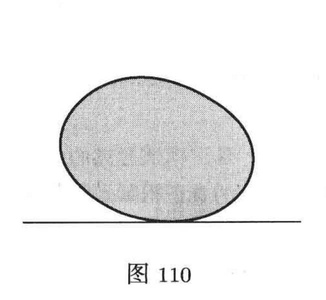


图 110

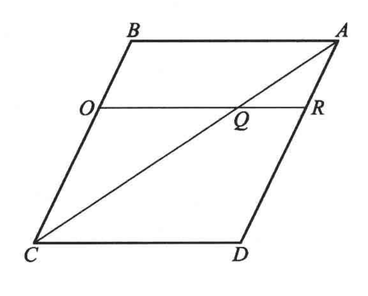


图 111

①有俄文译本 (ГТТИ, 1935).

②两书均有俄译本: "Геометрии" (《几何》) 及 "Олыта" (《尝试 IV》) (ГТТИ, 1940).

所谓图形的“所有的线”可以想到卡瓦列里理解为这些线的总和, 是无穷数量 (“无限”), 如此只有两个这样的和之比才能成为有限的. 看来 (虽然卡瓦列里在哪儿也未曾明白地说过) 不可分素是彼此成等距离的, 但这些距离在任何地方也不出现. 如果试图将卡瓦列里的思想用我们通行的词句来传达, 则可以说他采用了纵坐标之和 (或函数值之和) 但未乘以横坐标 (自变量) 的增量. 如此, 如果为简单计取边为 a 的正方形作为平行四边形而恢复乘以不可分素间的距离 h, 则上面所陈述的话可用 (当然是要有很多条件的) 这一串等式来说明:

$$\frac{\sum OR}{\sum QR} = \frac{\sum a}{\sum x} = \frac{\sum ah}{\sum xh} = \frac{\int_0^a a dx}{\int_0^a x dx} = 2.$$

卡瓦列里在其“几何学”中所建立的另一重要步骤是“平行四边形的所有线 OR 的平方”与“三角形的所有线 QR 的平方”之比. 经一长串推理的结果得出该比等于三. 在《尝试 Ⅳ》里他更将平行四边形与三角形的“所有线的立方”及“所有线的四次方”予以对比: 这里得出比率等于四及五. 由此卡瓦列里下结论说类此规律对任何自然数方幂 m 也都是正确的. 这个规律也可用我们的符号写成这样:

$$\frac{\int_0^a a^m dx}{\int_0^a x^m dx} = m+1,$$

如此, 这里所说的其实就是这个积分的计算:

$$\int_0^a x^m dx = \frac{1}{m+1}\int_0^a a^m dx = \frac{1}{m+1}a^{m+1}.$$

卡瓦列里立即应用其结果于种种求面积及求体积的问题, 但完全是不依靠应用而得出的. 这一问题 (正像和计算定积分的问题一样) 提法的一般性, 比起开普勒是前进了一步, 因为开普勒每次只能计算具体的体积.

219. 不可分素学说的进一步发展 借助与 $\int_0^a a^m dx = a^{m+1}$ 的对比来计算积分 $\int_0^a x^m dx$ 这是别的学者也做过的. 由法国数学家费马 (Pierre de Fermat, 1601—1665) 的通信中可以看到, 他得出了卡瓦列里的一般结果, 比卡氏还要早一些. 然后应该提到法国数学家、物理学家兼哲学家帕斯卡 (Blaise Pascal, 1623—1662) 及其著作《数幂之和》(1654); 也该提到英国学者沃利斯 (John Wallis, 1616—1703) 和我们已说到过的他的书《无穷数量的算术》(1655). 他们全都是由算术的想法出发并且将其计算联系到自然数序列 m 次方幂之和的问题. 以我们通行的词句来说, 问题实质可表示成这样: 如果将区间 $[0,a]$ 分为 n 个等长部分, 其长各为 $h=\frac{a}{n}$, 则积分和之比

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^m h}{\sum_{i=1}^{n} a^m h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^m}{n^{m+1}} \to \frac{1}{m+1}, \quad \text{如果 } n\to\infty.$$

但是极限过程, 只在沃利斯的著作中明白地提出来. 全部论证都以归纳法推理为基础.

在费马较晚的作品里①, 当他从事非二次的 "抛物线" $y^m = cx^n$ 及 "双曲线" $y^m x^n = c$ 之际已直接将曲线下图形分为条子 (如我们所做), 但小到使能 "看作" 与矩形一样. 在此横坐标甚至可不成算术级数而成几何级数 [参看 **184**, 2)]. 用这样的办法费马能算出方幂 x^r 在有理指数 $r = \pm\frac{n}{m}$ 情形的积分 (只有 $r = -1$ 这一古典双曲线的情形除外).

更接近于定积分的现代理解法并阐发 (尚未建立起来的) 积分学的力量的是帕斯卡. 我们所指的乃是他的那些作品, 它们合起来解决了他在 1658 年所提出的关于旋轮线的问题以及需要计算种种面积、体积、弧长并决定重心位置的一系列问题. 这些作品他当初是以如 "A. 德东维勒在几何学中的种种创发" 这样的假名方式发表的.

帕斯卡继续采用了 "不可分素语言", 但详密地预见到并仔细地阐明了这语言应如何理解. 例如, 如果半圆直径 (图 112) 在点 Z 分为 "无限数" 相等部分, 并作纵坐标线 ZM, 则所谓 "纵坐标线之和" 应理解为 "无限多个矩形之和, 每个矩形由每条纵坐标线与每个很小的直径等份所组成", 而这和与 "半圆面积之差小于任何给定的数". 在图 113 上圆弧 BC 用诸 D 点分成了 "无穷多" 段相等的弧, 由各分点所作垂线 DE 等可称为 "正弦". 在这情形, "如果简单地说诸正弦之和 DE, 则应理解为由每一正弦 DE 与每一段改直了的小弧 DD 所组成的矩形之和, 因为这些正弦是由弧的均分所产生的". 在所举诸例中, 所考虑的纵坐标线或正弦线应该乘以什么线分是显然的. 在别的情形这线分应该明白提到. 如此, 卡瓦列里 —— 他只考虑函数值 —— 所含糊过去的自变量 在此完全明白地规定出来了: 函数值乘以自变量增量.

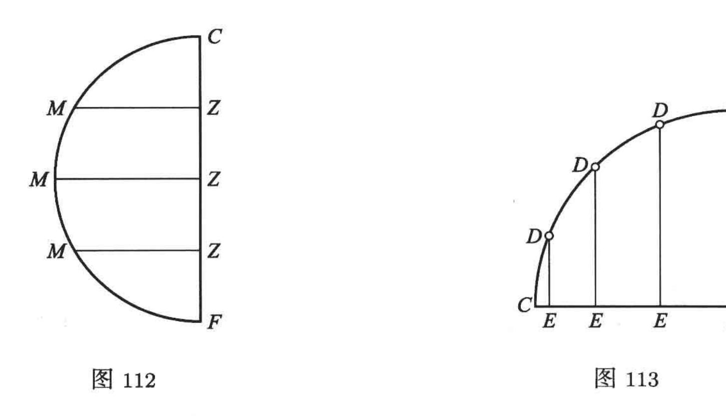


图 112　　图 113

为了对帕斯卡用来计算他所需积分的论证给出一个榜样, 我们举其 "论四分圆的正弦" 一文中的一个命题②. 首先建立了一个明显的引理 (参看图 114, 由它还可以明白记号):

$$DI \times EE = RR \times AB. \tag{1}$$

所说命题本身内容如下: 弧 BF 的正弦线之和 (图 115) 等于线段 AO, 乘以半径 AB.

在 (1) 中将每段切线 EE 代之以弧 DD 并把所有这样的等式都加起来, 左边得出我们所需的 "正弦和", 而右边则得所有 RR 之和, 也即 AO, 乘以 AB. 这就完成了证明.

①可在维莱脱纳 (Вилейтнер), "Хрестоматии по истории математики" (《数学史文选》) (ГТТИ, 1932) 第 Ⅳ 集, 70 页上找到其摘录.

②在已提过的维莱脱纳,《数学史文选》, 第 Ⅳ 集, 81 页有此文的摘录.

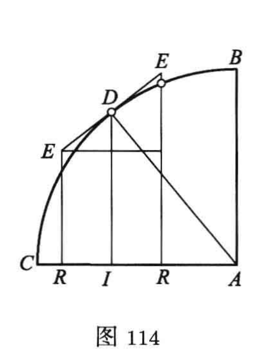


图 114

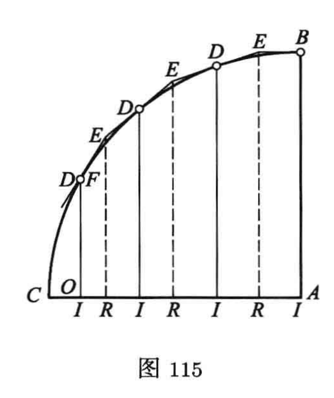


图 115

在它后面跟着有趣的“注释”, 其中帕斯卡请读者不要惊讶: “所有距离 RR 总起来等于 AO, 而且每段切线 EE 等于每段小弧 DD, 因为只要知道, 虽然在正弦线总数有限时这等式不真确, 但无限时却是真确的”.

用我们的语言来解释所证明的话, 我们设 $AB=1$ 并引入角 $\varphi=\angle BAD$; 于是它就等价于等式

$$\int_0^{\varphi}\cos\varphi d\varphi=\sin\varphi.$$

帕斯卡解决所提这个问题的办法也是很有教育意义的. 他预先以一般的形式精确地枚举了为此需要哪些类型的积分 (“和”). 然后他指出如何按他所感兴趣的情形将它们算出并由此完成其解. 我们还提一提把一些积分 (“和”) 变成另一些积分的各种相当复杂的积分公式; 帕斯卡由立体几何的想法得出了这些公式, 并且应用得很巧妙.

220. 求最大及最小 (极大极小) · 切线作法 现在我们转向微分学的前史. 这个分支的创始者应该算是费马, 他恰好研究了寻常属于微分学的两个问题: 求最大最小值及画切线, 并且最先应用了本质上具有微分性质的方法来解他的问题.

费马的作品 “最大最小研究法”① 由其书信而为世人所知, 这些书信起自 1629 年, 在 1642—1644 年局部发表, 至 1679 年才完全出版, 这已经是他去世后的事情了.

对于费马的求最大最小值法则 (没有任何论据!), 我们就他所考虑的一个问题来解释如下: 将已知线段 AC (图 116) 分割于 B 点, 使得 AB 平方及 BC 线段所构成的立体为最大的.

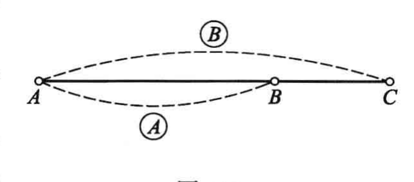


图 116

以 B 表示已知线段 AC, 以 A 表示所求线段 AB, 于是我们得最大体积的表达式 $A^2(B-A)$②. 以 $A+E$ 替代这里的 A (费马以字母 E 作为所考虑的数量 A 的增量的标准记号) 而将两式看作相等 (其实不相等!):

$$(A+E)^2(B-A-E)=A^2(B-A).$$

现在消去两边共同项并约去剩下式子里的所有因子 E:

$$2A(B-A)-A^2+E(B-A-E)-2AE=0.$$

①参看维莱脱纳,《数学史文选》, 第 Ⅳ 集, 第 78 页.

②这里及以下我们都采用现在通行的代数记号, 而不管所引原作者事实上怎样写法.

最后, 消除约简后尚残留有因子 E 的各项, 结果得出:

$$2A(B-A)-A^2=0 \quad 或 \quad 2AB=3A^2.$$

按费马的说法这已成为 "真" 等式, 而前面的等式则只是 "假想的" 或 "近似的". 由后式就定出 $A\left(=\dfrac{2}{3}B\right)$.

"费马法则" 的一般形式如果用函数记号来表示成为这样: 要找使 $f(A)$ 这个式子有最大值或最小值的 A 值, 费马先写近似等式

$$f(A+E)=f(A) \quad 或 \quad f(A+E)-f(A)=0,$$

由此除以 E 而得

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0.$$

在这等式里他消除还含有 E 的项, 即令 $E=0$ (而这就等价于取 $E\to 0$ 时的极限). 于是终于得出 "真正的" 等式

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$$

或按我们的记号就是 $f'(A)=0$, 由此定出所求的 A [参看 **100** 及 **112** 段].

E 其实就是自变量 A 的很小的增量 (如果不是无穷小的话), 虽然费马没有明说这一点. 开头的等式 $f(A+E)=f(A)$ 表示他的一种所谓逗留原理: 一个数量当其达到最大或最小值的时刻就好像停止了它的变化①.

费马在同一著作里指出, 他的方法也能解求作曲线切线的问题. 但这回他以 A 表示次切线, 而以 E 表示其增量 (或减量); 利用曲线的方程他先做成一个 "近似的" 等式, 然后应用前面那种程序, 结果得出一个等式而由此定出 A.

接近于费马的研究的有其他作家所给的上述问题的解法, 有的化简了费马法则, 有的推广了它的应用范围. 我们只提一提牛顿的老师依萨克 · 巴罗 (Isaac Barrow, 1630—1677) 在其《光学及几何学讲义》(1669—1670) 里所载的切线作法, 他指出这是 "按一位朋友的意思" 做的 (大概就指牛顿!).

巴罗对曲线上的点 M 的两个坐标及其增量引入了标准的记号 (图 117), 而令 $AP=f, PM=m, NR=e, RM=a$, 这里认为这些增量连同弧 NM 都是 "无限小的". 巴罗用曲线方程把点 N 的坐标 $f-e$ 和 $m-a$ 联系起来而在所得关系式中抛弃所有完全不含 e 或 a 的项 (它们事实上相消) 以及 e 和 a 的高次项 ("因为这些项没有什么意义"). 这里第一次明白地出现"忽略高阶小项原理" (而费马只能对它作猜测!).

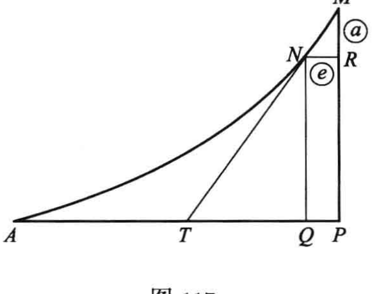


图 117

现在已经容易来决定 a 对 e 之比, 或者说纵坐标 $PM=m$ 对次切线 $TP=t$ 之比也是一样. 由有限三角形 TPM 与无限小三角形 NRM 的相似得出两个比的相等 (其中 "曲线粒子" 由于其 "无限小" 而可代以 "切线粒子").

①类似的原理以前也已有人说过, 例如开普勒.

这些相似三角形从那时候起就牢固地进入了无穷小分析, 而成为“家常便饭”了. 后来莱布尼茨称其为“特征三角形”①.

221. 借助运动学想法来作切线 法国数学家罗贝瓦尔 (Gilles Personne de Roberval, 1602—1675) 及意大利物理数学家托里拆利 (Evangelista Torricelli, 1608—1647) 几乎同时不谋而合地 (他们的研究最初发表于 1644 年) 想起利用运动学的想法来画曲线的切线. 即, 如果曲线能表为点的运动轨线, 该运动由两个较简单的运动所组成, 而其速度的大小方向都已直接给出, 则其合成运动的速度方向 —— 因而, 还有其轨线切线的方向 —— 就可按 “平行四边形法则” 来决定.

我们举托里拆利的抛物线切线问题解法为例. 他在此利用的是他老师伽利略的运动学想法. 为简单起见, 我们不用原来的讲法而用解析几何的语言来叙述. 设一点在初始瞬间位于 O (图 118) 而以加速度 g (即速度为 gt, 如果 t 表示时间的话) 沿竖直方向自由坠落, 它本身则以定速度 u 水平移动. 于是按图上的记号在瞬间 t 我们有:

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad y = ut,$$

由此消去 t 而得: $y^2 = 2\dfrac{u^2}{g}x$. 如此, 得出该点轨线为一抛物线 (按照 u 的选择可使它与任意抛物线 $y^2 = 2px$ 等同). 铅垂速度与水平速度之比等于

$$\frac{gt}{u} = \frac{gt^2}{ut} = \frac{2x}{y},$$

由此 —— 依据三角形相似性 —— 就可看出切线交抛物线轴于其顶点后距离 x 处 [参看 **210**, 2)].

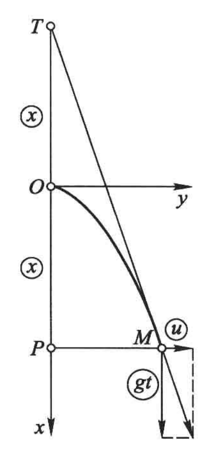


图 118

我们就由这个例子连带说到, 在此画切线利用了曲线运动的分解为水平及竖直方向两个分运动.

后来巴罗推广了这个观念而将沿任意曲线的运动表为如同由两个运动所组成 —— 一个水平运动 (它总是算作等速的) 及一个竖直运动. 于是切线 TM (图 118) 的位置可由线段 TP 与 PM 之比来决定, 它就等于 “下垂运动速度” 与 “侧向运动速度” 之比.

222. 切线作法问题与求积问题的互逆性 特别有趣特别重要的是巴罗《光学与几何学讲义》的第十讲和第十一讲: 其中作切线与求积联系起来. 在许多与此有关的命题中我们现在提出其第十讲的定理 XI 及第十一讲的定理 XIX, 其中在无穷小分析前史里最先把微分学及积分学的两个基本问题以几何形式对比联系起来 —— 即作曲线的切线与曲线的求积②. 把这两个定理翻译成解析的语言及通行的记号则其内容可如此陈述:

I. 如果 $y = \displaystyle\int_0^x zdx$, 则 $\dfrac{dy}{dx} = z$.

II. 如果 $z = \dfrac{dy}{dx}$, 则 $\displaystyle\int_0^x zdx = y$ (当 $x = 0$ 时理解为 $y = 0$).

要对巴罗实际所作的给出一个概念, 我们简略叙述其第二个定理的陈述及证明如下:

给定一条任意的曲线 AB (图 119). 设 MT 是在点 M 的切线. 第二曲线 KL 以这样的条件来下定义: $FZ : R = FM : TF$, 这里 R 是已给的线段 ($= DH$). 于是面积 $ADLK$ 等于 $DB \times R$ 这个乘积.

①但是他说无穷小 “特征三角形” 观念的采用不是始于巴罗而是始于帕斯卡 [参看 **219** 段].

②参看维莱脱纳,《数学史文选》, 第 IV 集, 第 89 页.

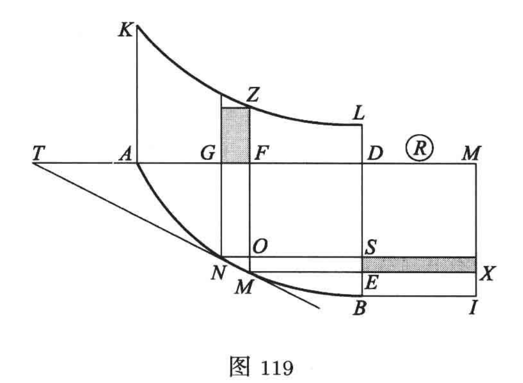


图 119

为了证明, 我们在曲线 AB 上取一 "无穷小线段 MN" 并作出图上所示诸线. 于是 (如我们已经知道的)

$$MO : NO = FM : TF = FZ : R,$$

由此有

$$NO \times FZ = MO \times R \quad 或 \quad GF \times FZ = ES \times EX.$$

"但既然所有矩形 $GF \times FZ$ 与面积 $ADLK$ 之差可小到任何所要的程度, 并且所有相应的矩形 $ES \times EX$ 形成矩形 $DHIB$, 则上面的断言就是足够明显的了."

如果设 $AF = x, FM = y, FZ = z$ 及 $R = 1$, 则按第二曲线的定义条件恰好有

$$\frac{z}{1} = \frac{FM}{TF} = \frac{dy}{dx},$$

而定理的结论就等价于

$$\int_0^x z dx = y \times 1 = y.$$

但是要在巴罗书中找这两个定理的最简单的对照也是找不到的 (在书中它们之间隔着二十个别的定理); 况且几乎没有用到它们. 这里也正表明了: 巴罗用几何语言来说, 没有以一般概念来领会, 而唯有这一般概念才能阐明问题的本质并开拓广阔的应用道路.

223. 上述的总结 我们来总结一下 17 世纪在 "无穷小分析" 方面的成就 —— 总结到牛顿和莱布尼茨出现于数学界为止.

有关于现在的积分学这个范围内的成就越来越多. 这里面不仅得出了大量关于求平面图形面积、体积、弧长、曲面面积及重心定位的结果, 也认识到所有在传统上归结为求面积的这类问题之间的联系. 在卡瓦列里、帕斯卡等等的著作中开始结晶出定积分概念本身. 实际上算出了一系列最简单的积分, 常常是几何的形式, 但有时也成算术的形式 (费马、帕斯卡、沃利斯); 找到了将一些积分变为别的积分的种种关系式 (费马、帕斯卡、巴罗).

在目前属于微分学的这个领域内, 费马给出了一种划一的无穷小性质的方法来解求最大最小和作切线的问题. 他的研究被一系列其他作家所延续. 但这方面未能分析出问题本质中的基本概念. 杰出的是罗贝瓦尔及托里拆利, 接着的是巴罗 —— 他们试图由运动学想法出发来解作曲线切线问题 (这后来也在牛顿的学说中得到了反映).

最后, 如我们刚才所见的, 巴罗在这两类问题中间搭成了一座桥梁.

如此. 这门新计算法的基础已备, 但像现在这样的微积分学还没有. 同时, 如后来莱布尼茨卓越地表达的, "在这样的科学成就之后, 所缺少的只是引出问题的迷宫的一条线, 即依照代数样式的解析计算法". 这里首先需要以一般形式建立新计算法的基本概念及其相互联系. 然后, 导入适当的记号而建立计算的正规程序或算法. 而这也就被牛顿和莱布尼茨以不同方式独立地① 完成了.

在评述他们关于无穷小分析工作之前, 我们先说说 "无穷小" 概念本身. 在那时期 —— 甚至还要在更长的时间内 —— 对无穷小或无限小常常理解为 (虽不明说) —— 比如说 —— 静的数量, 也即不变的数量, 不等于 0 而同时却 (绝对值上) 小于任何有限数量. 这个实有无穷小概念在我们的数及空间的概念之下是矛盾的并且带神秘性. 与它对立的是我们现在通行的、作为变量的 "潜在" 无穷小概念, 它只在变化过程中 (绝对值上) 小于任何有限数量. 由无穷小的一种理解法过渡到另一种理解法是要遭遇到相当大的困难的, 因为需要有明晰的极限过程概念. 这两种主张的斗争读者可在牛顿及莱布尼茨的工作中看到, 对此我们就要来讨论.

§2. 依萨克 · 牛顿 (Isaac Newton, 1642—1727)

224. 流数计算法 牛顿讲这种计算法的主要著作是论文 "流数术及无穷级数"②, 它大约于 1671 年写成 (基本概念或许形成得还要早些), 但在 1736 年才出版 —— 已经是作者去世后的事了. 牛顿称变量为 "弗流恩特" (即 "流动" 量之意), 而以最后几个拉丁字母 u, y, z, x 表之; 它们被看作是随时间增大 (或减少) 的. 其增长速度称为 "流数" 而以同样一些字母加点来表示: $\dot{u}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}$. 如此, 在牛顿说来速度是一个自明概念, 不需要定义, 而流数则是以它来下定义的, 即 —— 如果我们现在说起来 —— 流数是流动量依时间的导数③.

固然, 牛顿声明这里时间并不按字面来理解, 而所谓 "时间" 可以取作任何变量, 比如说 x, 它均匀地随着真正的时间这样增长, 比如说使得 $\dot{x} = 1$. 但要记得, 所有 流动量都依凭着这个 "时间", 也即依凭着同一个普遍的自变量. 如此, 在牛顿无所谓多自变量函数, 也无所谓偏导数.

然后牛顿如此陈述第一个基本问题:

" 按所给流动量间关系式来决定流数间的关系".

这问题比单由所给流动量计算流数较为一般些. 但牛顿只直接就代数方程来解它. 例如他取方程

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \tag{1}$$

牛顿所提出的法则如下: 每个含 x 方幂的项乘以 x 的幂指数而将一个因子 x 代换为 $\dot{x}$; 同样, 每个含 y 方幂的项乘以 y 的幂指数而将一个因子 y 代换为 $\dot{y}$; 让这样得出的所有诸项之和等于 0. 在当前的例中就得出

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

①我们完全撇开关于后来发生的, 关于新计算法创立优先权问题的毫无根据的争论.

②有俄文译本, 见 "Математические работы Ньютона" (《牛顿数学文集》) (ОНТИ, 1937), 25–166 页.

③虽然牛顿的记号现在已不通用, 但在力学及物理里至今仍保留用点表示对时间的导数这种习惯.

容易理解, 怎样把这个法则推广到含随便多少个流动量的代数方程的一般情形. 在有分式或根式时牛顿采取了绕弯的道路. 设给了一个方程

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0.$$

令

$$\frac{by^3}{a+y} = z \quad 及 \quad x^2\sqrt{ay+x^2} = u,$$

牛顿将它化为方程

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0,$$

对此施用所说的法则:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

至于 $\dot{z}, \dot{u}$, 则它们又由施同一法则于方程

$$az + yz - by^3 = 0, \quad ax^4y + x^6 - u^2 = 0$$

所得的关系式来决定.

在证明该法则时牛顿导入这个新概念: 流动量的 “契机”. 这就是 “它们的那些无穷小部分, 把它们加到时间的无穷小部分中之后就使该量本身不断增大”. 这些契机与量的变化速度 (即流数) 成比例. 导入了无穷小量 o (这不是零而是 “实有” 无穷小时间增量), 牛顿把量的契机写成这样: $\dot{u}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dot{x}o$ (即莱布尼茨的微分!).

牛顿的证明本身已在上面的例子里举过, 基本上也就是重复*费马的步骤*. 在等式 (1) 里以 $x + \dot{x}o$ 代 x, 以 $y + \dot{y}o$ 代 y, 而逐项减去 (1), 约以 o, 并且最后把还含有 o 的项略去: “既然 —— 牛顿解释 —— 我们假设了 o 是无穷小量, 则被它所乘的那些项可以算作没有”. 这个原理及该法则本身形式上都不是新东西, 而本质上新鲜之处在于: *这里结果是对任何种流动量陈述的*, 而不管讲的是什么特殊问题.

后来牛顿还导入了流数的流数, 即二阶流数: $\ddot{u}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{x}$ 以及高阶流数.

牛顿先应用他的流数计算法于前面屡次讲过的问题.

“决定数量的最大值与最小值”.

先陈述这个*逗留原理*: “当一个数量是所有可能的量中最大的或最小的时候, 则它在此时刻不向前流动也不向后流动”. 由此得到一个法则: 找出流数而让它等于 0. 在此, 如牛顿所强调, *决定流动量的关系式也可含有无理式, 这是早先所发表的法则所不容许的*.

“求作曲线的切线”.

当给出了曲线上变动点的笛卡儿坐标 x, y 间的方程时, 在这种主要情形牛顿的演证与巴罗相似 [**221** 段], 只是无穷小增量 (或减量) e 及 a 他以 $\dot{x} \cdot o$ 及 $\dot{y} \cdot o$ 来替代, 如此 (保持图 117 的记号)

$$PM : TP = \dot{y} : \dot{x};$$

流数之比就按所说法则由曲线方程所决定. 牛顿也讨论了一些别的相应于曲线的其他给出法的切线作法.

提法全新的是这个问题:

“决定任何给定的曲线在定点上的曲率大小”.

牛顿陈述这问题后还附加一句: "曲线理论中很少有比这更漂亮更能深入揭露其本性的问题了".

没有给出曲率概念的定义. 对于圆而言曲率在一切点上都相同, 对不同的圆弧则曲率与直径成反比例. 曲线在定点 D 的曲率 (图 120) 就与一个在此点近处与曲线最密接的圆的曲率相等 (事实上牛顿就认为曲线与圆沿无穷小弧 Dd 融合为一). 如果 C 是这个圆的中心 ("曲率中心") 则曲线的无穷接近的法线 CD 与 Cd 就相交于该点. 对该圆半径 ("曲率半径") 牛顿推出了公式, 只是与我们现在的写法不同.

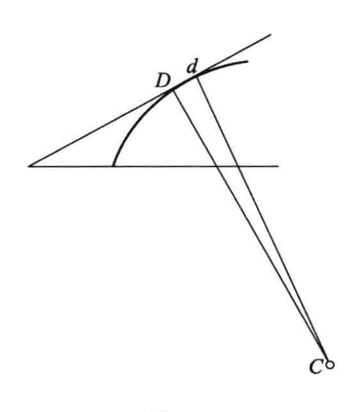


图 120

225. 流数计算法的逆计算法 · 求积 牛顿在其 "流数术" 中第一个基本问题之后, 就陈述了第二个反面的问题:

"依据含流数的方程来求流动量间的关系".

这样的形式, 就成了 (我们现在所谓) 常微分方程的求解问题, 远比直接由流数求流动量 (即求原函数) 一般得多并且艰难得多. 我们不谈这里所说的一般问题 (牛顿多半用无穷级数来解) 而只来讲一讲求原函数的问题, 对此牛顿总是以几何方式来处理 —— 作为曲线的求积问题.

所根据的基本原则是 (用我们现在流行的说法): 变动面积对横坐标的导数就是纵坐标, 如此面积就是纵坐标的原函数 [参看 **156** 段].

有兴趣的是这个命题的证明, 牛顿在其较早的著作里就给出来了[①], 还是在流数术形成之前. 要证明曲线 $y = ax^{\frac{m}{n}}$ 的面积 z (由 $y = 0$ 的点算起) 可由公式 $z = \dfrac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ 表出, 牛顿走相反的道路而由面积表达式得出纵坐标的表达式. 他由这个特例开始: 如果 $z = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, 则 $y = x^{\frac{1}{2}}$; 我们来重述这里有关的推证, 它是完全具有一般性的.

如此, 设 (图 121) $AB = x, BD = y$ 而面积 $ADB = z$. 我们让 $B\beta = o$ (这里 o 还不像流数理论中那样表示时间增量) 而导入 $BK = v$, 使具有面积 ov 的矩形 $B\beta HK$ 与 $B\beta\delta D$ 成一样大的图形; 于是 $A\beta = x + o$ 而 $A\delta\beta = z + ov$.

将这些式子替代关系式 $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ 或 $\dfrac{4}{9}x^3 = z^2$ 中的 x 及 z, 按寻常手续对消相等的项并约去 o 后得出等式

$$\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2.$$

图 121

"如果现在 —— 牛顿接着说 —— 假设 $B\beta$ 无限变小而化为乌有或者 o 成为零, 则 v 与 y 成为相等的, 并且带因子 o 的项都消去". 由此已经不难得出所求的结果:

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

既然 v 事实上就是面积的增量 ($= ov$) 与横坐标的增量 ($= o$) 之比, 而 "在 o 无限变小时 v 等于纵坐标" 这句话并不受所考虑的特例的限制, 则实际上这就是上面陈述的命题的证明了 [参看

① "运用无穷多项方程的分析"; 参看《牛顿数学文集》, 3–24 页. 这论文还是 1666—1667 年写的, 但 1711 年才刊出.

156]. 我们指出, 这里 $o = B\beta$ 几乎就是我们所理解的无穷小而令人感到有引向极限过程的一种暗示.

牛顿在“流数术”中采取了另一种办法. 连同变动曲线图形 ADB 他同时考虑一个变动矩形 $ACEB$, 其高 $AC = 1$(图 122). 两个面积各由直线 BD 及 BE 的运动所“产生”. “于是这些面积的增量[①] 及其流数将与描出它们的直线成同一比率”. 用以前的记号 (考虑到矩形面积为 x) 我们有

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{y}{1} \quad 或 \quad \dot{z} = y\dot{x}.$$

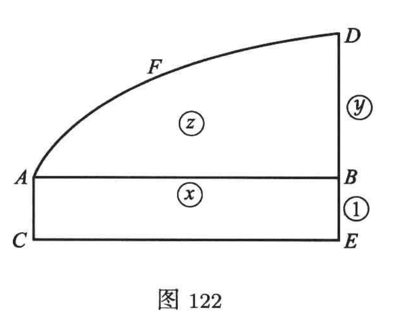


图 122

在假设 $\dot{x} = 1$ 之下我们得出简单的式子 $\dot{z} = y$. 这两个结果牛顿经常用到.

现在不难来解决这个问题:

“试求随便多少这样的曲线, 其面积用一个有限方程所表出”.

也就是, 预先给出 x 与 z 间一个任意的方程, 要来由它找一个 x 与 $\dot{z} = y$ 之间的方程; 这样也就找出了一条曲线, 其面积有一个预先知道的以横坐标表出的式子 (或者, 一般地, 由已知的方程与横坐标联系起来).

跟着牛顿提出这个问题:

“试求随便多少曲线, 其面积与某一已知曲线的面积由一个有限方程联系起来”.

简单地说, 这里一个积分借助替换化为另一个积分, 但运算 —— 和刚才一样 —— 是以相反的次序进行的: 找一个函数, 其积分能借助预先给定的替换由预先给定的方程以已知的积分表出.

利用这两种方法牛顿编制了丰富的曲线“目录”, 其求积或可立即做出, 或可借助所指示替换化为椭圆或双曲线的求积 (“其面积可算作用某种方法已经知道”). 化为圆锥曲线的求积事实上就是利用最简单的超越函数 —— 对数函数及反圆函数, 这些在当时还未引入数学分析.

牛顿在另一著作专讲求积的计算: “论曲线的求积”, 在“流数术”以后不久写成而出版于 1704 年[②]. 那里讨论了较复杂的形式, 例如,

$$z^{\theta}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \cdots)^{\lambda}(a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + \cdots),$$

这里 θ, λ, η 是有理指数. 作为一个特例, 我们指出求二项式积分, 即求

$$z^{\theta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$$

这样式子的原函数. 但是, 关于这种积分牛顿在他给莱布尼茨 (1676 年) 的一封信里说得比较详细: 他知道如果 $\frac{\theta + 1}{\eta}$ 是整数 (正的) 或 $\frac{\theta + 1}{\eta} + \lambda$ 成整数 (负的) 时, 求积可以用代数方式做出 [参看 **169** 段].

---

①这回看来是“实有”无穷小.

②参看《牛顿数学文集》, 167–193 页. 该论文绪论及其他部分带有后来修改的痕迹.

至于求积计算法的应用, 则在 "流数术" 里牛顿清楚地强调说, 曲线面积表也就可以用来按所给流数决定别种数量. 下面这个问题可以作为一个例子:

"求曲线之长".

这问题就是要按流数 $\dot{t}=\sqrt{\dot{z}^2+\dot{y}^2}$ 来决定弧长 $t=QR$ (图 123), 这里 $z=MN$ 及 $y=NR$ 是曲线 $\dot{y}$ 上变动点 R 的横坐标及纵坐标. 而上面关于 $\dot{t}$ 的公式则由直角三角形 RSr 推出, 其边就可看作 z, y, t 的 "契机".

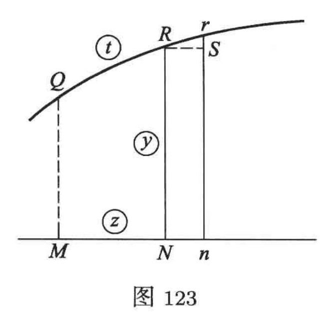


图 123

226. 牛顿的 "原理" 及极限理论的萌芽 使牛顿成名的最重要著作是 1686—1687 年所出版的《自然哲学的数学原理》[1], 其中一般地奠立了全部力学特别是天体力学的基础.

牛顿在一封信里说, 他用流数术找到了《原理》的最重要的命题. 但在叙述中这情况没有任何反映: 寻常只是以综合几何形式 —— 按照古典的榜样 —— 列出命题的证明.

但《原理》却有些在方法论方面根本新的和重要的东西. 在第一卷 ("论物体运动") 的第一部分牛顿就用来讲他的特殊的*极限理论*, 名称是 "始末比方法".

两个数量的 "始比" 或 "末比" 就是指它们的*极限比*, 第一个名称牛顿用来表示两个 "发生的" (无穷小) 量之比的极限, 而第二个则他既用于 "消逝" (无穷小) 量之比又用于有限量甚至无穷大数量之比, 而不加区别. 牛顿还讲到 "发生量的始和" 或 "消逝量的末和". 要注意的是, 所有这些概念都*没有下定义*, 而其含义只能由其用法本身去揣测. 牛顿的术语的特点联系着*变量达其极限*的观念, 所以这极限就成为它的 "末" ("始") 值.

牛顿的极限理论全部由十一个几何性质的引理所组成. 如牛顿在它们后面的 "说明" 中所指出, 这些引理是为了化简证明而列出的. 本来也可以借助不可分素方法来证明, 但后者表现得 "比较不够几何化". "所以 —— 牛顿接着说 —— 如果在以下的全部叙述中我也把某种数量看作仿佛由固定的粒子所组成, ······ 则应该理解为, 这不是不可分的, 而是消逝的可分的数量, 不是有限部分之和及比, 而是消逝量的末和及末比 ······". 并且还说: "如果以下为了说话简单起见我将说到很小的或消逝的或发生的数量时, 则对此不应理解为许多定量, 而应看作是无限消逝的." 如此, 这里宣布了原则上接近于现代的观点: 代替着 "实有" 无穷小而考虑 "潜在" 无穷小及其和与比的*极限*.

227. 牛顿的奠基问题 我们可看出, 牛顿对其计算法的奠基问题的观点在二十年间有显著的演进.

在反映其旧看法的 "流数术" 里数量的 "契机" 分明是 "实有" 无穷小, 数量的增长则归结为契机的逐渐添加. 他随便地应用和有限量对比之下的*忽略无穷小量原理*.

在牛顿的《原理》里已经与不可分素观点绝缘. 在稍晚所写的 "曲线求积" 的绪论里他说: "这里我不把数学上的数量看作是由最微小的粒子所组成, 而看作是由连续运动所产生 (描出)". 由《原理》第二版 (1713 年) 的一个注里可以看出, 恰恰是 "在数量的形成方式上" 牛顿看出他的方法与莱布尼茨的方法有主要的区别. 我们在其《原理》中所看到的极限理论 —— 虽然属萌芽的形式 —— 但是在新的解析的奠基问题上已经是一项显著的进展. 后来在已经说过的那 "曲线求积" 的绪论里, 牛顿还将 x^n 的流数的推导联系到两个消逝量的 "末比" 来考虑, 本质上也就是极

[1]有 A. H. 克雷洛夫院士 (1915—1916) 的俄译本, 另外, 还收入 "Собрания сочинений акад. A. H. Крылова" (《A. H. 克雷洛夫院士全集》) (1936), 第七卷.

限过程.

但是牛顿却没有坚持这种观点到底. 不久以后, 在《原理》第二卷里, 他导入不清楚的概念 —— 数量的"契机", 即其"瞬间增量或减量".

关于这些契机他建立了一系列简单的命题 (应该指出, 此时莱布尼茨已经以等价的形式发表了). 例如, 这是其中之一: *如果数量 A, B 的契机是 a, b, 则乘积 AB 的契机是 $Ab + Ba$*. 有趣的是牛顿在证明时不由这自然发生的等式

$$(A + a)(B + b) - AB = Ab + Ba + ab$$

出发, 因为这时候他必须对比其他项而*略去* ab 项 (莱布尼茨也正是这么做), 但诉诸一点机巧, 即

$$\left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) - \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right) = Ab + Ba,$$

它诚然立即导出所求结果, 但完全不是出于事情的本质.

如此, 牛顿以其"始末比方法"给新计算法建立合理基础的尝试是不彻底的. 这尝试经过了一百多年才有进一步的发展和完成 —— 已经是 19 世纪初的数学家的工作了 [**233** 段].

§3. 莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716)

228. 建立新计算法的初步 与牛顿不同, 莱布尼茨身后留下了巨大的亲笔遗稿, 并有日期可以回溯其观念的发展次序. 在一种标明 1675 年的手稿里最早见到 $\int$ 这个记号, 莱布尼茨说: "把 '*所有*' 写作 $\int$, 把 '*所有* l' 写作 $\int l$, 即用以替代 'l *之总和*' 是方便的" (这里 l 表示线). 不久以后也出现了*差数*的记号 d, 并建立了有关这些记号的简单公式. 但莱布尼茨后来才逐渐开始*在记号* $\int$ *下写* dx *或* dy!

在 1676—1677 年间牛顿和莱布尼茨 (经第三者介绍) 曾两度书信往来. 牛顿在信中叙述了他的关于无穷级数展开及求积的结果. 在讲到自己写好的论文时 (似乎是指"流数术"), 牛顿还说已经有了方法, 不但可用以解切线或最大最小问题, 并且还能使求积问题变得容易; 但方法本身则讳而不谈. 莱布尼茨立即答之以他自己的方法内容, 不过, 只限于微分法. 他写道:

"线段 TB_1 (图 124) 与纵坐标线 $B_1C_1$① 之比等于 C_1D (即两横坐标 AB_1, AB_2 之差) 与 DC_2 (即两纵坐标之差) 之比. …… 由此可见, 求作切线无非就是求纵坐标之差, 只要随意令横坐标之差彼此相等. 所以, 如果以后用 dy 表示两个极近的 y 之差, dx 表示两个极近的 x 之差, 则显然 $d(y^2)$ 就是 $2ydy, d(y^3)$ 就是 $3y^2dy$, 等等". 例如,

$$dy^2 = (y + dy)^2 - y^2,$$

或者, 如果略去彼此对消的数量以及平方 $(dy)^2$ —— "它的根据在最大最小方法中已经知道了,"② 则有 $d(y^2) = 2ydy$.

进一步, 莱布尼茨导出了乘积及方根 (把方根看作方幂) 的微分公式, 还微分了较复杂的根式并且强调说: "很奇妙并且非常便利的是 dy 及 dx 总在无理关系之外".

①这里及以后都应注意莱布尼茨习惯于沿竖直方向取横坐标, 而沿水平方向取纵坐标.

②暗示费马及别人对求最大最小问题的解法.

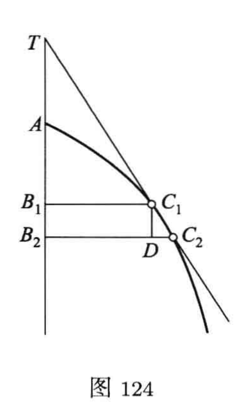


图 124

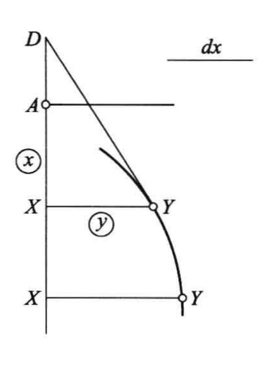


图 125

229. 最先刊行的微分学著作 在 1684 年才出版了莱布尼茨的第一种札记, 它的标题很长: "一种最大最小以及切线的新方法, 此法对分式及无理量均通行无阻并为此种算法的独特方法."①

这里莱布尼茨起先试图避免无穷小并对变量的 "差" (differentia) 或 "微分" (quantitas differentialis) 采取与上面所引他给牛顿的信中不同的观点. 设 (图 125) YY 是一条任意的曲线, Y 是曲线上一个变动点, 其横坐标为 $AX = x$, 纵坐标为 $YX = y$. 莱布尼茨直截了当以 dx 简单地表示一个任意取定的线段. 如果 YD 是曲线在点 Y 的切线, 则与 dx 之比等于 $y : XD$ (XD 是次切距) 的那个线段就叫做 dy.

如此, 与牛顿不同, 在他原始概念是速度, 而在莱布尼茨则原始概念是切线.

然后, 莱布尼茨报道了 (未加任何证明): "关于常数、和、差、积、商、方幂、方根等的微分 '计算法则'". ②"如果知道我称为微分学的这种计算法的 (比如说) 算法, 则 ······ 可以找最大最小以及切线, 而不必利用此前已发表的各种方法那样要试图消除分式和无理式 ······". 至于所有这些的证明, 则须注意 $dx, dy, \cdots$ 可以看作各与 $x, y, \cdots$ 的 "瞬间增量或减量" 成比例. 如此, 归根到底问题仍然是考虑无穷小, 一如上面所说给牛顿的信中一样!

莱布尼茨指出, 纵坐标的最大最小可由这条件来决定: 切线不偏向任何一侧, 即要 $dy = 0$; 在这时候纵坐标 "不增, 也不减, 而处于静止状态". 他这样来区别最大与最小: 看曲线以凹侧向着轴还是以凸侧向着轴, 而这由 $d\,dy$ 的正负号来判断. 最后, 他研究了拐点 (固然这里有欠明确处).

在结尾时莱布尼茨用他的方法解决了一系列问题, 其中有这个著名的问题, 是 17 世纪费马及其他学者所做过的: 光线由一种介质中的点 C 到另一种介质中的点 E 应取怎样的路径 (图 126) 乃能使所经历时间最短? 莱布尼茨引入该二介质的 "密度" h 及 r (意义是 "光线在其中所受阻力"), 并且在表示分界面的直线 SS 上找一个点 F, 使路径 CFE"成为所有可能路径中最容易的一条", 也就是使

$$w = CF \cdot h + FE \cdot r$$

成最小. 按图上的记号则有

$$w = hf + rg = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$

①有俄译本 (Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница) (《莱布尼茨数学论文摘录》) ("数学科学的成就" 第三卷, 第一期, 1948, 166–173 页).

②在有些情形要出现双重正负号, 因为次切距未加正负号.

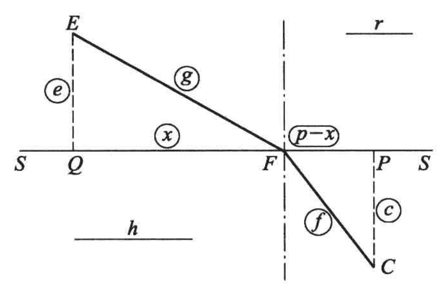


图 126

所求的 x 可由条件 $dw=0$ 也即

$$\frac{h(p-x)}{f}=\frac{rx}{g}$$

来决定, 这条件也可写成

$$\frac{p-x}{f}:\frac{x}{g}=r:h.$$

不难看出, 这式子就表示物理学上一个熟悉的定律: 入射角正弦及折射角正弦与两介质光学密度成反比. 莱布尼茨总结说: “熟悉这种计算法的人一下就能做出的, 但别的最有学问的人却必须绕很大的弯子才能做到.”

230. 最先刊行的积分学著作 在 1686 年莱布尼茨发表了札记 “论一种深邃的几何学和不可分素解析以及无穷”①, 这里最早出现记号 $\int$ (这次写成小写字母 s 的样子).

首先讲到巴罗的一个定理. 如果以 y, x 及 p 各表示横坐标、纵坐标及次法距, 则 $pdy=xdx$ (这不难利用以 dy 及 dx 为勾股的无穷小 “特征” 三角形来得出). “如果把这个差的 (微分的) 方程化为和的方程, 则有 $\int pdy=\int xdx$. 但由在我的切线法中所说过的可以看出 $d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=xdx$; 所以反之也有 $\frac{1}{2}x^2=\int xdx$ (因为我们这里和与差或 $\int$ 与 d 是互逆的, 正与寻常乘方与开方的情形一样)”. 由此得 $\int pdy=\frac{1}{2}x^2$, 这就是巴罗定理的涵义.

莱布尼茨强调说, 他的计算法也能用方程表出 “超越的” 也即非代数的曲线, 例如旋轮线之类. 我们来叙述该札记中相应之处, 不过补充上莱布尼茨自己在信中对此所给的解释. 在图 127 表出了半个圆及半拱旋轮线; 设圆的半径为 1, 而 $AB=x, BE=v, BC=y, AE=a, GD=dx, DL=dv$. 于是, 按一个熟悉的几何定理有 $v=\sqrt{2x-x^2}$, 如此

$$dv=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx,\quad GL=\sqrt{(dx)^2+(dv)^2}=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},\quad a=\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

既然, 按照产生旋轮线的方法, $EC=a$ 而 $y=a+v$, 则

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

“这方程完全表出纵坐标 y 与横坐标 x 间的关系, 并且由此可以推出旋轮线的一切性质” (例如, 借助微分法不难由此推出旋轮线的切线或法线的熟悉作法). 如此, 积分法对于莱布尼茨成为一种作出超越函数的工具, 这种函数如果不用积分法他就写不出来也不能加以研究了.

① 参看《莱布尼茨数学论文摘录》, 175–177 页.

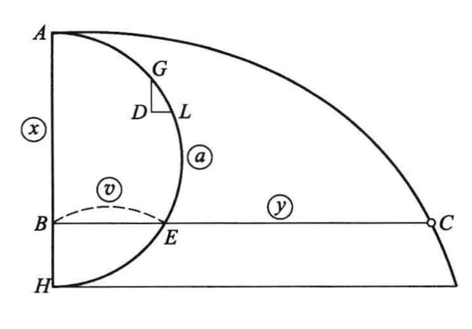


图 127

在札记末尾莱布尼茨作了一个重要的警告, 说不可在记号 $\int$ 下忽略乘以 dx, 因为这样将阻塞由一个图形变换为另一图形的道路. 显然, 这里指的是能使一种求积化为另一种求积的变量变换法, 而这做起来, 确实因为有 dx 而简化.

如此, 对于莱布尼茨, 积分计算法里的基本概念是"实有"无穷小矩形 ydx 之和(这他后来依照伯努利兄弟的榜样称为*积分*); 而牛顿则以原函数概念作基础, 这是我们已看到的. 对于应用而言莱布尼茨的观点比较方便, 虽然积分的计算本身他也归结为求原函数.

231. 莱布尼茨的其他著作 · 学派的建立 莱布尼茨几十篇论文和笔记以及他与当时杰出数学家的通信, 内容是非常丰富多彩的. 首先包含着他所建立的计算法的进一步发展. 关于这类问题有些我们在本书前几章里已经讲到过: 幂指数式的微分法 [**85** 段, (5)], 乘积的高阶微分公式 [**98** 段], 有理分式的分解为简分式以便于积分 [**166** 段]. 莱布尼茨的其他作品有的是关于函数按无穷级数的展开, 有的则属于解析的较高深范围 [我们将在本书第二卷讲到]. 除去作出解析的工具以外, 莱布尼茨还从事于其应用方面, 特别是在"微分几何"里的应用. 他常常对同时代的人提出种种应用问题, 并且他也解决别人所提出的问题.

特别有重要意义的事情是, 围绕莱布尼茨出现了一个学派, 其主要代表有*雅各布 · 伯努利* (Jokob Bernoulli, 1654—1705) 和约翰 · 伯努利 (Johann Bernoulli, 1667—1748) 这两兄弟以及*洛必达* (Guillaume François de l'Hospital, 1661—1704) 这位第一部微分学教本的作者. 学派的形成促进了莱布尼茨的科学热情, 他笔下源源产生作品及积极的科学通信.

也不能低估他所创议的方便记号的地位, 它们如此*适合于几何及力学的研究* (难怪莱布尼茨的记号我们基本上至今仍沿用!). 适宜的记号无疑地便利了他一开头就想望着的算法的建立. 这种算法渐渐成了公共的财富.

232. 莱布尼茨的奠基问题[①] 在这方面莱布尼茨经历到很严重的困难并且终身未停止寻求其计算法的根据的途径.

"实有"无穷小不但成为微分学的基础, 同样也成了积分学的基础. 对于微分学莱布尼茨 [**229** 段] 还试图将无穷小差代之以与其成比例的有限数量; 和无穷小 ("不可表明的") 特征三角形一道他同时也考虑了与它相似的 ("可表明的") 有限三角形. 但推导其公式时他仍不能避开无穷小及利用*忽略高阶无穷小原理*.

在答复对新计算法的批评攻击中, 莱布尼茨提出以"无比小"数量代替"无穷小"数量, 微尘对地球而言或地球对天空而言就是这样的量. 此外, 莱布尼茨在他的其他发言里曾强调说, 他完全

①参看《莱布尼茨数学论文摘录》, 187–196 页.

没有把无穷小量理解为“事实上很小的而总是确定的常数”; 这种量应该只是充分地小而使误差小于任何指定的数. 在此, 如果乐意的话, 可以看出接近于“潜在”无穷小观点的暗示.

莱布尼茨甚至认为这情形的可能出路是: 把无穷小看作“虚构的”或“理想的”概念, 只用来以便于发现并简化论证, 就好像寻常解析中的虚根一样. 最后, 他还拟定了一类观念, 试图以此来论证他的推论的合法性 —— 这就是他的“连续性原理”, 与极限过程有些联系. 但莱布尼茨想给自己的计算法找到根据的一切尝试, 似乎对他自己也不是完全有说服力的. 莱布尼茨在一种手稿里曾提出这样的问题: 无穷小是不是真的存在? 它们有没有严格的根据? 莱布尼茨声称: “我想这可能仍是疑问”.

另一方面, 在他一篇争辩性的论文里他这样说过: “对那些试图证明一切, 甚至连最初的原则也想加以证明的人们的努力, 我给以很高的评价而且我自己也常常参与其事. 但是我不赞成因过分的细密而阻碍了创造的技巧或者在这借口之下抛弃最好的创发而以此剥夺其果实 ······.” 如此, 莱布尼茨甚至在对所建立的计算法举出根据的可能性没有把握时, 仍旧认为它所导出的那些结果可以证实它的运用是合理的.

事情的这种情况, 马克思在下面这几句针对那时代数学家所说的话里, 评述得再好不过了: “他们自己相信新发现的计算法的神秘性, 这种新发现的计算法用从数学上看来肯定是不正确的方法得出了正确的 (而且在几何学的运用上来说简直是惊人的) 结果. 这样, 他们自己就欺骗了自己, 甚至把这种新的发现奉为至宝. ······”①

233. 结尾语 最近一百多年数学分析获得进一步的繁荣, 它的方法改善了, 应用范围显著推广了. 但是它仍然保持相当程度的“神秘性”: 它的基础屡次受到批判而还是不明确.

固然, 17 世纪数学家仅仅草创的极限概念后来是明确化了. 著名彼得堡院士欧拉 (Leonard Euler, 1707—1783) 在他的《微分学》(1755 年) 序言里很清楚地说到两个变量增量越来越小时其比所越来越趋近的极限. 关于这一点我们在 **26** 段里已经说过, 但那里曾强调指出, 在欧拉自己的论文里极限概念却一次都未用到. 差不多同一时期法国数学家兼哲学家达朗贝尔 (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783) 在著名的《百科全书》中他所写的条目里也给出了极限概念的一般定义, 并且他深信: “极限理论就是微分学的真正形而上学的基础.” 在 18 世纪末俄罗斯数学家兼力学家古里叶夫院士 (Семен Емелъянович Гуръев, 1764—1813) 广泛传播了极限理论在解析及几何里的应用. 但事实上极限概念仍然没有实际上成为数学分析奠基的武器. 如此, 在 1797 年卡诺 (Lazare Carnot, 1753—1823) 发表了他的《关于无穷小的形而上学的思考》②, 其中他重复了早先已说过的思想而试图以误差的相互抵偿为理由错误地说明何以恒能从可疑的方法得出正确的结果!

到了 19 世纪初 —— 特别是柯西 (Augustin Cauchy, 1789—1857) —— 才给整个数学分析的系统构成用极限概念打下了现在的基础, 终于消除了任何神秘论. 但是, 我们知道, 这基础中仍然还遗留着漏洞 —— 没有包括实数概念的严密基础, 也没有建立实数域的连续性; 这到了 19 世纪的后期才完成.

现在读者终于能全盘了解本卷中所学那些微积分基本概念的起源、发展及明确化的情景了.

①卡尔 · 马克思 “Математические рукописи” (Под знаменем марксизма, 1, 1933), (数学手稿) (《在马克思主义旗帜下》), 65 页.

②有俄译本 (ГТТИ, 1933).

索　引

(数字表示段号)

m 维 “长方体”, 126
m 维闭 “长方体”, 126
m 维闭球面, 126
m 维点的坐标, 125
m 维空间, 125
m 维空间的点, 125
m 维空间中的区域, 126
m 维球面, 126
m 元函数, 128
m 重极限, 131

A

阿基米德螺线, 196
凹向, 214
奥斯特罗格拉茨基的积分有理部分分出法, 167
奥斯特罗格拉茨基公式, 167

B

半开区间, 15
被积函数, 155
被积式, 155
被积式的有理化方法, 168
比值的极限, 40
闭集, 127
闭区间, 15
闭区域, 127
边界, 127
变弧, 202
变弧及其微分, 202
变量, 14
变量的变域, 15
变量的初值, 155
变量的增量, 60
波尔查诺 – 柯西定理, 52
波尔查诺 – 柯西条件, 52
波尔查诺 – 魏尔斯特拉斯引理, 51
伯努利 – 莱布尼茨公式, 8
不定积分, 155

不定积分的存在性, 156
不定积分的分部积分法, 162
不定积分的换元积分法, 160
不定积分的几何解释, 156
不定积分的性质, 155
不能表为有限形式的积分, 165
部分序列, 51

C

差的极限, 40
常用对数, 22
乘积的极限, 40
初等函数, 22
初等函数的导数, 79
初等函数的连续性, 63
次法线, 210
次切线, 210

D

达布和 (上和, 下和), 177
待定系数法, 166
戴德金基本定理, 5
单侧导数, 86
单侧极限, 35
单侧间断性, 60
单侧切线, 86
单调函数, 44
单调函数的极限, 44, 47
单调函数的间断, 60, 67
单调函数的可积性, 179
单调函数的连续性条件, 61
单调序列, 44
单值函数, 17
导数, 76
导数不存在的例子, 88
导数的极限, 103
导数的几何解释, 77
导数的间断, 88
导数间断的例子, 88
等价的无穷小量, 56
等轴双曲线, 19
笛卡儿叶形线, 209
第一类、第二类、第三类椭圆积分, 174
典式积分, 174
点的函数, 123
点的邻域, 28
点集的直径, 137
定积分, 176
定积分的分部积分法, 187
定积分的几何解释, 175
定积分的近似计算, 189
定积分的下限和上限, 176
定积分的性质, 180
定积分的应用, 204
定积分中的变量替换, 186
定积分作为上限的函数, 183
对称数, 8
对数的存在性, 12
对数函数, 22
对数函数的导数, 79
对数函数的连续性, 63
多变量函数的高阶微分, 148
多元函数的极限, 129
多元函数的间断, 132
多元函数的偏增量, 138
多元函数的全增量, 139
多元有理分式函数, 128
多元有理函数, 128
多元有理整函数, 128
多值函数, 17
多重极限, 131

E

二次锥面, 213
二项式微分的积分, 169
二元函数, 124

F

反函数, 23
反函数的存在性, 71

反函数的导数, 80
反三角函数, 24
反三角函数的导数, 81
反三角函数的连续性, 63
反三角函数的主支 (主值), 24
方程的根及其存在性, 69
方程的近似解, 69
费马定理, 100
复合函数, 25
复合函数的导数, 84
复合函数的连续性, 64

G

高阶导数, 95
高阶偏导数, 146
高阶微分, 98
高阶无穷小量 $o(\alpha)$, 54
根的存在性, 10
根的算术值, 10
根式的积分, 168
供电网络, 154
古尔丁定理, 206
拐点, 113
关于函数取零值的定理, 68
关于连续函数有界性的定理, 73
关于无穷小量的引理, 39

H

函数, 17
函数乘积的导数, 83
函数乘积的连续性, 62
函数的单侧连续性, 60
函数的单侧连续性或单侧间断性, 60
函数的叠置, 25
函数的定义域, 17
函数的二重极限, 131
函数的函数, 25
函数的和的导数, 83
函数的和的极限, 40
函数的和的连续性, 62
函数的极限, 32
函数的解析表示法, 18
函数的全增量, 139
函数的特定值, 17
函数的图形, 19
函数的一致连续性, 74
函数的振幅, 73
函数的自变量, 17
函数关系, 16
函数为常数的条件, 110
函数为单调的条件, 111
函数在点的连续性, 60
函数在区间上的连续性, 61
和的极限, 40
弧长, 199
弧长的可加性, 199
换元积分法, 160
混合导数, 147

J

积分存在条件, 178
积分的近似计算, 189–192
积分的有理部分, 167
积分对数, 172
积分法则, 158
积分学基本公式, 185
积分学中的中值定理, 182
积分余弦, 172
积分正弦, 172
基本积分表, 157
极限的唯一性, 36
极值, 112
集合的内点, 127
加速度, 78
间断, 60
减函数, 47
简单分式及其积分, 165
交换求极限的顺序, 131
交换微分的顺序, 147
角点, 86

解析表达式, 18
近似公式, 56
静止点, 112
聚点, 32
绝对误差, 相对误差, 56
绝对值, 8

K

开区间, 15
开区域, 127
康托尔定理, 75
柯西不等式, 125
柯西定理, 柯西公式, 104
柯西形式的余项, 106
可积函数, 176
可积函数类别, 179
可求积的体, 197
可求积区域, 193
可求积条件, 193
可微函数, 89
空间曲线的弧长, 203

L

拉格朗日定理, 拉格朗日公式, 102
拉格朗日型余项, 106
莱布尼茨公式, 97
勒让德函数 $F(k)$, $E(k)$, 192
勒让德函数 $F(k, \varphi)$, E, (k, φ), 174
勒让德式的椭圆积分, 174
黎量 (积分) 和, 176
力功, 208
立体的体积, 197
立体体积的可加性, 198
连通区域, 134
连续函数的可积性, 179
连续函数的算数运算, 62
连续函数的性质, 68–75
流数, 224
罗尔定理, 101
螺旋线, 203
洛必达法则, 120, 121

M

麦克劳林公式, 105
幂函数, 22
面积的可加性, 194

N

纳皮尔对数, 50
内体积和外体积, 197
牛顿 – 莱布尼茨定理, 156, 183
牛顿始末比方法, 226

O

欧拉等式, 145
欧拉替换, 170
偶函数, 115

P

抛物线, 22
抛物线公式 (辛普森公式), 190
佩亚诺余项, 107
偏导数, 138
偏增量, 138
平均曲率, 215
平均速度, 76
平面图形的静矩, 207
平面图形的面积, 193
平面图形的面积存在的条件, 193
平面图形的内面积和外面积, 193
平面图形的质心, 207
平面图形面积的可加性, 194
普通间断, 第一类间断, 第二类间断, 67

Q

齐次函数, 145
奇函数, 115
切比雪夫法则, 109
切比雪夫公式, 109
切面, 213

切线, 77
切线的正方向, 212
求极值法则, 113, 114
求面积问题, 156
球带, 205
区间, 15
区间函数, 204
区间套引理, 46
区域的边界, 127
曲率, 215
曲率半径, 216
曲率圆, 216
曲率中心, 216
曲面的法线, 213
曲面的方程, 124
曲面的奇点, 213
曲线的法线, 210
曲线的方程, 19
曲线的方向, 199
曲线的静矩, 206
曲线的奇点, 210
曲线的质心, 206
曲线梯形的面积, 156, 196
全微分, 142
全微分在近似计算中的应用, 144

R

热容量, 78
任意导数的普遍公式, 96

S

三角函数, 22
三角函数的导数, 79
三角函数的连续性, 63
三角函数和指数函数的积分, 171, 172
三轴椭圆体, 198
扇形的面积, 196
上 (积分) 和, 下 (积分) 和, 177
实数, 2
实数次幂, 11
实数的乘法, 9
实数的除法, 9
实数的加法, 7
实数的减法, 8
实数集合的分割, 5
实数集合的连续性, 5
实数集合的有序化, 3
实数相等, 3
收敛原理, 52
数 e, 48
数 e 的近似计算, 49
数 e 的无理性, 49
数的整数部分 $E(x)$, 17
数集的边界 (上界, 下界), 6
数集的上确界和下确界, 6
数列 (序列), 27
数轴, 13
双曲抛物面, 152
瞬时速度, 76
算术空间, 125

T

泰勒公式, 105
泰勒公式的余项, 106
特征三角形, 220
梯形公式, 189
梯形公式的余项, 191
体积存在的条件, 197
体积的极限形式, 198
体积的可加性, 197
椭圆, 196
椭圆积分, 173
椭圆抛物面, 152

W

完全椭圆积分, 192
微分, 89
微分表, 91
微分的几何解释, 90
微分法则, 83, 91

微分形式的不变性, 92
微分学中的中值定理, 104
微分作为近似公式, 93
伪椭圆积分, 173
未定式的定值法, 41
魏尔斯特拉斯定理, 72
沃利斯公式, 188
无尽十进小数, 4
无理数, 1
无穷大, 6
无穷大量, 31
无穷大量的分类, 59
无穷大量的级, 59
无穷导数, 87
无穷区间, 15
无穷小分析, 217, 223
无穷小量, 29
无穷小量的分类, 54
无穷小量的级, 55
无穷小量的主部 (主项), 57
误差估计, 94

X

弦长与弧长之比的极限, 211
线段的测量, 13
线段长度的可加性, 13
辛普森公式, 190
辛普森公式的余项, 191
$\frac{0}{0}$ 型的未定式, 41
$\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式, 41
$0\cdot\infty$ 型的未定式, 41
$\infty-\infty$ 型的未定式, 41
$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ 型的未定式, 66
序列的极限, 28
旋轮线, 196
旋转面面积, 205
旋转抛物面, 124
旋转体的体积, 198
旋转椭圆体, 198

Y

一阶微分形式的不变性, 143
以积分表出体积, 198
隐函数的导数, 141
隐函数求导, 141
用变量替换法计算定积分, 186
用分步积分法计算定积分, 187
用积分和计算定积分, 184
用列表法表示函数, 17
用小数逼近实数, 4
用原函数计算定积分, 185
有界点集, 135
有界点序列, 135
有理分式函数, 22
有理分式函数的连续性, 63
有理函数, 22
有理函数的连续性, 63
有理数, 1
有理数集合的分割, 2
有理整函数, 22
有理整函数的连续性, 63
有限增量定理, 有限增量公式, 102
有向区间, 180
余割, 22
余切, 22
余弦, 22

Z

在等式与不等式中取极限, 38
增函数, 47
折线 (在 m 维空间中), 125
真分式, 166
真分式的积分, 166
真分式分解为简单分式, 166
正割, 22
正切, 22
正弦, 22
直线的参数方程, 125
直线段的长度, 13

指数函数, 22
指数函数的导数, 79
指数函数的连续性, 63
质量分布的平均密度, 78
中值定理, 70
自变量, 16
自然对数, 50
自然对数向常用对数的换算, 50

相关图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x，★为最新出版。

书号	书名	著译者
18303-0	微积分学教程（第一卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18304-7	微积分学教程（第二卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18305-4	微积分学教程（第三卷）(第 8 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
★34526-1	数学分析原理（第一卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
★35185-9	数学分析原理（第二卷）(第 9 版)	[俄] Г. М. 菲赫金哥尔茨
18302-3	数学分析（第一卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
20257-1	数学分析（第二卷）(第 4 版)	[俄] В. А. 卓里奇
★34524-7	自然科学问题中的数学分析	[俄] В. А. 卓里奇
18306-1	数学分析讲义（第 3 版）	[俄] Г. И. 阿黑波夫、В. А. 萨多夫尼齐、В. Н. 丘巴里阔夫
25439-6	数学分析习题集 (根据 2010 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
31004-7	工科数学分析习题集 (根据 2006 年俄文版翻译)	[俄] Б. П. 吉米多维奇
29531-3	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第一册）	沐定夷、谢惠民 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32356-6	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第二册）	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
32293-4	吉米多维奇数学分析习题集学习指引（第三册）	谢惠民、沐定夷 编著， 卫瑞霞、吴茂庆 审校
30578-4	复分析导论（第一卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
22360-6	复分析导论（第二卷）(第 4 版)	[俄] Б. В. 沙巴特
18407-5	函数论与泛函分析初步（第 7 版）	[俄] А. Н. 柯尔莫戈洛夫、С. В. 佛明
29221-3	实变函数论（第 5 版）	[俄] И. П. 那汤松
18398-6	复变函数论方法（第 6 版）	[俄] М. А. 拉夫连季耶夫、Б. В. 沙巴特
18399-3	常微分方程（第 6 版）	[俄] Л. С. 庞特里亚金
22521-1	偏微分方程讲义（第 2 版）	[俄] О. А. 奥列尼克
25766-3	偏微分方程习题集（第 2 版）	[俄] А. С. 沙玛耶夫
23063-5	奇异摄动方程解的渐近展开	[俄] А. Б. 瓦西里亚娃、В. Ф. 布图索夫
27249-9	数值方法（第 5 版）	[俄] Н. С. 巴赫瓦洛夫，Н. П. 热依德科夫，Г. М. 柯别里科夫
20525-1	代数学引论（第一卷）基础代数（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
21491-8	代数学引论（第二卷）线性代数（第 3 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
22506-8	代数学引论（第三卷）基本结构（第 2 版）	[俄] А. И. 柯斯特利金
18946-9	现代几何学：方法与应用（第一卷）曲面几何、变换群与场（第 5 版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯

书号	书名	著译者
21492-5	现代几何学：方法与应用（第二卷）流形上的几何与拓扑（第5版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
21434-5	现代几何学：方法与应用（第三卷）同调论引论（第2版）	[俄] Б. А. 杜布洛文、С. П. 诺维可夫、А. Т. 福明柯
18405-1	微分几何与拓扑学简明教程	[俄] А. С. 米先柯、А. Т. 福明柯
28888-9	微分几何与拓扑学习题集（第2版）	[俄] А. С. 米先柯、Ю. П. 索洛维约夫、А. Т. 福明柯
22059-9	概率（第一卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22555-6	概率（第二卷）(第3版)	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22554-9	概率论习题集	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
22359-0	随机过程论	[俄] А. В. 布林斯基、А. Н. 施利亚耶夫
22634-8	随机金融基础（第一卷）事实. 模型	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
23983-6	随机金融基础（第二卷）理论	[俄] А. Н. 施利亚耶夫
18403-7	经典力学的数学方法（第4版）	[俄] В. И. 阿诺尔德
18530-0	理论力学（第3版）	[俄] А. П. 马尔契夫
22155-8	连续介质力学（第一卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
22633-1	连续介质力学（第二卷）(第6版)	[俄] Л. И. 谢多夫
29223-7	非线性动力学定性理论方法（第一卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等
29464-4	非线性动力学定性理论方法（第二卷）	[俄] L. P. Shilnikov 等

网上购书：academic.hep.com.cn

www.china-pub.com

www.joyo.com

www.dangdang.com

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。**购书免邮费**，发票随后寄出。

单位地址：北京西城区德外大街4号

电　　话：010-58581118/7/6/5/4

传　　真：010-58581113

通过邮局汇款：

地　　址：北京西城区德外大街4号

户　　名：高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账：

户　　名：高等教育出版社有限公司

开 户 行：交通银行北京马甸支行

银行账号：110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。 任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。 为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。 社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010) 82086060
反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn
通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120